Guía docente de

Cálculo para la Computación

Ingeniería Informática. E.T.S.I. Informática

Dpto. de Matemática Aplicada
Universidad de Málaga

Cálculo para la computación
©2009, Agustín Valverde Ramos.
Este trabajo está editado con licencia "Creative Commons" del tipo:

Reconocimiento-No comercial-Compartir bajo la misma licencia 3.0 España.

Usted es libre de:

copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra.

hacer obras derivadas

Bajo las condiciones siguientes:

Reconocimiento. Debe reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor o el licenciador (pero no de una manera que sugiera que tiene su apoyo o apoyan el uso que hace de su obra).

No comercial. No puede utilizar esta obra para fines comerciales.

Compartir bajo la misma licencia. Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

- Al reutilizar o distribuir la obra, tiene que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.
- Alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor
- Nada en esta licencia menoscaba o restringe los derechos morales del autor.

Yo no enseño a mis alumnos, solo les proporciono las condiciones en las que puedan aprender.

Albert Einstein

Este libro está concebido como una "guía docente" para la asignatura *Cálculo para la computación* de la titulación de Ingeniería Informática para el curso 2009/10. Sin embargo, su contenido es fruto del trabajo de los últimos cinco años y en él han participado todos los profesores que durante este tiempo han impartido dicha asignatura.

A lo largo de estos años, se ha ido rediseñando, curso a curso, la asignatura con unos objetivos claros. Por una parte, se ha adecuado el contenido de cada tema a las necesidades reales de un futuro ingeniero informático, intensificando o relajando los contenidos de cada apartado en función de ello. Por otra parte, se ha buscado adaptar la curva de aprendizaje de los alumnos a su base real de conocimientos.

En lugar de "libro" utilizamos la denominación de "guía docente" porque define mejor la estructura elegida. El contenido se divide en "temas", no en "capítulos", y cada tema se divide en "lecciones", no en secciones. Cada tema se inicia con una descripción en términos docentes: se detallan los objetivos, los prerrequisitos y se da un esquema de su contenido. Cada lección concluye con una relación de ejercicios denominada "básica" y que contiene ejercicios de dificultad baja y media; estos ejercicios deben ser resueltos por el alumno a medida que estudia el tema. Finalmente, cada tema termina con dos relaciones de ejercicios cuya dificultad se ajusta a los objeivos perseguidos; estos ejercicios

deben ser resueltos por el alumno para completar el estudio óptimo de la unidad temática. No obstante, cada alumno debería elegir la cantidad final de ejercicios a resolver, en función de la facilidad o dificultad que encuentre al abordar el estudio de cada una de las partes de las lecciones.

Es importante destacar que, atendiendo al peso de la asignatura en el plan de estudios de la titulación y a la traducción de este peso en tiempo real de trabajo, esta asignatura precisa de 252 horas de estudio a lo largo de un curso académico, incluyendo las horas dedicadas en el aula. Naturalmente, este tiempo deberá ser incrementado o podrá ser reducido en función de la formación previa del alumno y de la "calidad" de las horas de estudio.

La distribución de los contenidos del curso abandona en algunos momentos lo que puede considerarse una estructura clásica de un curso de cálculo; además, también se han eliminado secciones que, aunque apararecen habitualmente en este tipo de cursos, consideramos que son más propias de estudiantes de matemáticas puras. Por ejemplo, la lección dedicada a las ecuaciones diferenciales se plantea como continuación al cálculo de primitivas, ya que ambos temas comparten técnicas, y la resolución de ecuaciones diferenciales se sustenta en el cálculo de primitivas. En este mismo sentido, las series de Fourier se incluyen en el tema dedicado a las aplicaciones de la integral. En este caso, el objetivo es doble; por una parte, se estudian después de haber aprendido a calcular primitivas y tras repasar el cálculo de integrales definidas, métodos en los que se basa la determinación de los desarrollos de Fourier; por otra parte, mostramos al alumno la inevitable imbricación de los distintos temas y le "obligamos" a repasar lecciones anteriores. Esta idea es otra de las características del diseño de la asignatura: pretendemos que las destrezas a desarrollar por el alumno tengan dificultad ascendente, y para ello intentamos que, en la medida de lo posible, cada lección use, y por lo tanto refuerce, los contenidos de las lecciones anteriores.

Puede resultar extraño que el tema dedicado al estudio de los campos escalares no incluya un estudio formal de los conceptos de límite y de diferenciabilidad. En dicho tema, nos centramos en el estudio de las propiedades de los campos continuos y diferenciales y en las aplicaciones de dichos conceptos. Entendemos que es necesario que un estudiante de cálculo conozca en profundidad las funciones continuas y diferenciables antes de enfrentarse al análisis de casos "excepcionales".

Índice general

1. Preliminares **1**

1.1. Polinomios y ecuaciones 3

1.2. Los números complejos 32

2. Sucesiones y series numéricas **59**

2.1. Sucesiones numéricas 60

2.2. Series Numéricas 83

3. Curvas planas **133**

3.1. Curvas parametrizadas 135

3.2. Cónicas 153

4. Campos escalares **173**

4.1. Continuidad y diferenciabilidad 178

4.2. Optimización de campos escalares 201

5. Ecuaciones diferenciales **223**

5.1. Cálculo de Primitivas 224

5.2. Ecuaciones diferenciales 244

6. Integración **271**

6.1. Integración de funciones de una variable 272

6.2. Integración múltiple 297

TEMA 1

Preliminares

Objetivos. Los objetivos fundamentales del tema son (1) recordar y reforzar la manipulación de expresiones algebraicas, en especial los polinomios; (2) recordar y reforzar las técnicas de resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones; (3) saber calcular polinomios de Taylor; (4) saber operar con números y funciones en el cuerpo de lo números complejos; y (5) saber utilizar los números complejos como herramienta en la resolución de problemas con números reales.

Prerrequisitos. Gran parte del contenido de este tema debe ser conocido el alumno, por lo que parte del tiempo de preparación lo dedicará a recordar conocimientos: saber manejar con soltura expresiones algebraicas (resolución de ecuaciones, simplificación,...) en las que aparezcan funciones elementales de tipo polinómico, potenciales, logarítmicas y trigonométricas. Otro prerrequisito del tema será el cálculo de derivadas.

Contenido.

- Lección 1.1: Polinomios y ecuaciones. Polinomios. El Binomio de Newton. Cambio de centro de un polinomio. Polinomios de Taylor. Compleción cuadrados. Forma factorizada de un polinomio. Funciones racionales y fracciones simples. Sistemas de ecuaciones.
- Lección 1.2: Los números complejos. Conjuntos numéricos: operaciones, propiedades y estructura. El cuerpo de los números complejos. Forma binómica un número complejo. Función exponencial compleja. Forma exponencial de un número complejo. Igualdad de Euler y fórmula de Moivre. Otras funciones con variable compleja: potencias y raíces, logaritmos, funciones trigonométrica y funciones hiperbólicas.

Los contenidos de este primer tema giran alrededor de dos nociones básicas, los *polinomios* y los *números complejos*. Sin embargo, el tema está concebido para que gran parte del trabajo necesario para su estudio sea repasar y reforzar conceptos y técnicas que el alumno debe conocer al iniciar unos estudios universitarios.

Dentro de la lección dedicada a los polinomios, aparecen los polinomios de Taylor. Si bien hasta el tema siguiente no aprenderemos sus aplicaciones, la inclusión en este tema servirá para que el alumno repase las reglas de derivarión y las funciones elementales, a la vez que aprende algo nuevo. De la misma forma, los números complejos no representan un tema especialmente difícil de forma aislada, pero requiere que el alumno recuerde propiedades y técnicas de manipulación de potencias, logaritmos y funciones trigonométricas. Por estas razones, el tema se denomina *Preliminares*: alrededor de dos nociones relativamente simples se construye un tema pensado para repasar y para adaptarse.

Debemos pararnos brevemente en la última parte de la primera lección. Aunque la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones ocupen ese lugar en esta guía, su contenido será trasversal al tema y está pensado para que el alumno tenga un punto de referencia para aclarar las dudas que le puedan surgir sobre esos aspectos, aunque naturalmente, se estarán utilizando y resolviendo ecuaciones desde el primer día del curso.

LECCIÓN 1.1

Polinomios y ecuaciones

1.1.1. Polinomios

Un polinomio es una expresion algebraica de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \tag{1.1}$$

el número n debe ser *natural* y, si $a_n \neq 0$, se denomina *grado* del polinomio; los números a_i son *reales o complejos*, aunque en esta lección solo trabajaremos con reales, y la variable x es la variable del polinomio. Para cada i, el *monomio* $a_i x^i$ se denomina *término* i-ésimo o término de grado i y el número a_i se denomina *coeficiente* i-ésimo.

Ejemplo 1.1.1

1. $P(x) = 3x^2 - x + 1$ es un polinomio de grado 2.
2. $Q(x) = x^3 + x - 2$ es un polinomio de grado 3. ——

Los polinomios definen un tipo de funciones elementales que se denominan *funciones polinómicas*. El dominio de todas estas funciones es $\mathbb{R}$ y todas son continuas e infinitamente derivables en $\mathbb{R}$. Una importante característica de las funciones polinómicas es que las propiedades analíticas, y sus consecuencias, pueden ser utilizadas para deducir propiedades algebraicas; y viceversa, las propiedades algebraicas se pueden interpretar de forma analítica. Entender estás relaciones es uno de los objetivos de este tema.

El siguiente teorema establece una propiedad que, aunque pueda parecer muy simple, constituye la base de muchas de las técnicas que aprenderemos en el resto del tema y a lo largo de la asignatura.

Teorema 1.1.1 *La función polinómica*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

es nula ($f(x) = 0$ para todo x) si y solo si $a_i = 0$ para todo i.

Ejemplo 1.1.2 ¿Cúal es el valor de a si la siguiente igualdad es válida para todo x?

$$x^2 + ax + 4 = (x-2)^2$$

Obsérvese que, al decir que la igualdad debe ser valida para todo x, estamos estableciendo algo más fuerte que una ecuación, estamos estableciendo una

identidad entre funciones.

$$\begin{aligned} x^2 + ax + 4 &= (x-2)^2 \\ x^2 + ax + 4 - (x-2)^2 &= 0 \\ x^2 + ax + 4 - x^2 + 4x - 4 &= 0 \\ (a+4)x &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando el teorema anterior a la última identidad entre funciones, podemos deducir que $a = -4$. ——

En el desarrollo de este ejemplo, hemos usado la técnica que se conoce como *identificación de coeficientes* y que, como vemos, es consecuencia del teorema 1.1.1.

Naturalmente, las propiedades de los números reales (conmutatividad, asociatividad, distributividad,...) permiten transformar unas expresiones en otras devolviendo funciones identicas pero con distintas expresiones. En el caso de los polinomios, podremos tener otras expresiones algebraicas reducibles a la forma (1.1) y que también deben ser consideradas como polinomios. De hecho, vamos a aprender a manejar otras formas de escribir funciones polinómicas y que dependiendo del tipo de problema a resolver, serán más útiles:

- La expresión (1.1) se denomina *forma expandida*.
- Forma *centrada* en un número arbitrario y el caso particular de *cuadrados completos* para polinomios de grado 2.
- Forma *factorizada*.
- *Descomposición factorial*.

Un error bastante frecuente es la tendencia a expandir los polinomios cuando trabajamos con ellos, pensando que esto facilita su manipulación en la resolución de ecuaciones, cálculo de derivadas, cálculo de primitivas,... Esto no siempre es cierto, por lo que se debe aprender a trabajar con los polinomios en sus distintas representaciones y a elegir la forma adecuada al tipo de problema.

1.1.2. El Binomio de Newton

En esta sección introducimos la fórmula del binomio de Newton para calcular cualquier potencia de una suma de expresiones y que generaliza la siguiente:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Para expandir una potencia como $(a+b)^7$ bastaría con multiplicar siete veces la expresión $(a+b)$ eliminando los paréntesis adecuadamente. El binomio de Newton es simplemente una fórmula que nos "ahorra" este trabajo.

DEFINICIÓN 1.1.2 (FACTORIAL) *Definimos el* factorial *de un número natural n, denotado por $n!$, como sigue:*

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ n! &= (n-1)! \cdot n \quad \textit{para todo } n \geq 1 \end{aligned}$$

En esta definición, el operador factorial se define de forma *recursiva*, es decir, la definición se llama así mismo hasta llegar a un *caso base*. Otra forma alternativa de escribir la definición del operador es

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \quad \text{para todo} n > 0$$

EJEMPLO 1.1.3

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 1 \cdot 2 = 2, \quad , \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 10 = 3\,628\,800$$ ——

DEFINICIÓN 1.1.3 (NÚMEROS COMBINATORIOS) *Sean n y k dos números naturales tales que $0 \leq k \leq n$. Se define el* número combinatorio $\binom{n}{k}$*, que se lee "n sobre k", como*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{1.2}$$

EJEMPLO 1.1.4

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0! \cdot 0!} = 1, \quad \binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10, \quad \binom{10}{7} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120$$ ——

Las siguiente proposición recoge tres propiedades que se pueden deducir muy fácilmente desde la definición.

PROPOSICIÓN 1.1.4 *Para todo $n \in \mathbb{R}$ y todo $k \in \mathbb{N}$:*

1. $\binom{n}{0} = 1$ 2. $\binom{n}{n} = 1$ 3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

La forma habitual de calcular los números combinatorios es expandir parcialmente el factorial del denominador y simplificar con el numerador:

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120$$

Esto lo podemos hacer de forma general para obtener una expresión alternativa para los números combinatorios.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)((n-k)!)}{k! \cdot (n-k)!} = \\ = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \quad (1.3)$$

La expresión obtenida en (1.3) es aplicable incluso si n es un número real o no es mayor que k, lo que permite generalizar la definición de los números combinatorios.

Definición 1.1.5 (Números combinatorios) *Sea x un número real y k un número natural. Se define el* número combinatorio $\binom{x}{k}$*, que se lee "x sobre k", como*

$$\binom{x}{0} = 1, \quad \binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!} \text{ si } k > 0$$

Para recordar la fórmula anterior, es muy útil tener en cuenta que el número de factores en el numerador debe ser exactamente k.

Ejemplo 1.1.5

$$\binom{1/3}{4} = \frac{(1/3)\cdot(-2/3)\cdot(-5/3)\cdot(-8/3)}{4!} = \\ = -\frac{2\cdot 5\cdot \cancel{8}}{3^4\cdot \cancel{4}\cdot 3\cdot \cancel{2}} = -\frac{10}{243} \qquad \text{——}$$

La siguiente propiedad es la más importante de los números combinatorios, siendo el fundamento de el *Triángulo de Pascal* que veremos a continuación y del *Binomio de Newton.*

Proposición 1.1.6 *Para todo $n \in \mathbb{R}$ y todo $k \in \mathbb{N}$:*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Ejemplo 1.1.6 En este ejemplo, mostramos cómo se llega a esta igualdad en un caso particular; por esta razón, evitamos la realización de la mayoría de los cálculos intermedios. Este tipo de desarrollos nos ayudan a entender demostraciones generales, en las que manejamos variables y parámetros en lugar de números concretos.

$$\binom{8}{3} + \binom{8}{4} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3!} + \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4!} = \frac{4\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3!} + \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4!} = \\ = \frac{4\cdot 8\cdot 7\cdot 6 + 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4!} = \frac{(4+5)\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4!} = \binom{9}{4} \qquad \text{——}$$

A la vista de este ejemplo, es fácil entender la demostración de la proposición 1.1.6

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \\
&\quad = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} + \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot(n-k)}{(k+1)!} = \\
&\quad\quad = \frac{(k+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k+1)\cdot k!} + \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k)}{k!} = \\
&\quad\quad\quad = \frac{(k+1+n-k)\cdot n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k+1)!} = \\
&\quad\quad\quad\quad = \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

Triángulo de Tartaglia. La propiedad 1.1.6 permite calcular los números combinatorios usando una representación geométrica que se donomina *Triángulo de Tartaglia* o *Triángulo de Pascal*. En el vértice superior del triángulo, colocamos el número $\binom{0}{0}$ y debajo de él colocamos los números $\binom{1}{0}$ y $\binom{1}{1}$, formando un primer triángulo con solo tres números. A partir de aquí, vamos añadiendo nuevas filas usando la siguiente regla: debajo de cada par de números, colocamos su suma:

$$\begin{array}{ccc}
\binom{n}{k} \quad\quad \binom{n}{k+1} & & \binom{n}{k} \quad\quad \binom{n}{k+1} \\
\searrow \quad\quad \swarrow & \overset{1.1.6}{=} & \searrow \quad\quad \swarrow \\
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} & & \binom{n+1}{k+1}
\end{array}$$

Adicionalmente, cada fila se comienza con $\binom{n}{0}$ y se termina con $\binom{n}{n}$. Vemos a continuación el triángulo resultante hasta la quinta fila; a la izquierda usando la representación de los números combinatorios y a la derecha con los valores resultantes.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 \quad 1 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 \quad 5 \quad 1
\end{array}$$

La segunda aplicación de la proposición 1.1.6 es el *Binomio de Newton* que nos da una fórmula para "expandir" las potencias de una suma. En esta

fórmula, utilizamos el símbolo $\sum$, que va acompañado de una serie de parámetros para indicar la expresión a sumar, $f(n)$, la variable respecto de la que se suma, n, y los valores inicial, a, y final, b, que toma la variable:

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(a) + f(a+1) + \cdots + f(b)$$

En muchos lenguajes de programación o en programas de cálculo simbólico, esta expresión tiene una sintaxis similar a

$$\text{sum}(f(n), n, a, b)$$

Teorema 1.1.7 (Fórmula del Binomio de Newton) *Para todo par de números reales a, b, se verifica que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

En este teorema hacemos uso de un importante operador matemático, el *sumatorio*. Con este operador podemos representar la suma de varias expresiones que se diferencian solamente en el valor de un parámetro. Para la fórmula del binomio de Newton, este parámetro es k y cada sumando se corresponde con un valor de este parámetro comprendido entre 0 y n. También podemos escribir este tipo de sumas usando "puntos suspensivos",

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \\ &= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n,\end{aligned}$$

pero como puede verse, estas expresiones pueden ser difíciles de entender, ya que debemos "deducir" cual es el patrón común de cada sumando.

Ejemplo 1.1.7

- $(x-y)^2 = \binom{2}{0}x^2(-y)^0 + \binom{2}{1}x(-y) + \binom{2}{2}x^0(-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- $(s+t)^3 = \binom{3}{0}s^3t^0 + \binom{3}{1}s^2t + \binom{3}{2}st^2 + \binom{3}{3}s^0t^3 = s^3 + 3s^2t + 3st^2 + t^3$
- $(z-2)^6 = z^6 - 12z^5 + 60z^4 - 160z^3 + 240z^2 - 192z + 64$
- $2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$ ——

En el siguiente ejemplo, vamos a calcular la potencia tercera de un binomio de tal manera que podamos "intuir" la demostración de la fórmula general.

Ejemplo 1.1.8 Calculamos la potencia tercera a partir del cuadrado, pero escribiendo los coeficientes como números combinatorios:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\ &= (a+b)(\tbinom{2}{0}a^2+\tbinom{2}{1}ab+\tbinom{2}{2}b^2)\\ &= a(\tbinom{2}{0}a^2+\tbinom{2}{1}ab+\tbinom{2}{2}b^2)+b(\tbinom{2}{0}a^2+\tbinom{2}{1}ab+\tbinom{2}{2}b^2)\\ &= \tbinom{2}{0}a^3+\tbinom{2}{1}a^2b+\tbinom{2}{2}ab^2+\tbinom{2}{0}a^2b+\tbinom{2}{1}ab^2+\tbinom{2}{2}b^3\\ &= a^3+(\tbinom{2}{1}+\tbinom{2}{0})a^2b+(\tbinom{2}{2}+\tbinom{2}{1})ab^2+b^3\\ &= a^3+\tbinom{3}{1}a^2b+\tbinom{3}{2}ab^2+b^3\end{aligned}$$

En la última igualdad hemos usado la proposición 1.1.6. ——

Para hacer una demostración general a partir de la idea mostrada en este ejemplo, necesitamos aplicar "sucesivamente" los mismos pasos. La técnica que permite hacer esto formalmente se conoce como *Inducción matemática*: para demostrar que todo los números naturales verifican una determinada propiedad $\mathcal{P}$, tenemos que:

(i) Demostrar que el número 0 verifica la propiedad $\mathcal{P}$.

(ii) Deducir que $n+1$ tiene la propiedad a partir de la suposición de que n verifica la propiedad.

El apartado (i) puede sustituirse por la misma prueba para otro número (1, 2, ...), siendo la conclusión que todos los números a partir de él verifican la propiedad deseada.

Por ejemplo, para el binomio de Newton podemos partir de la propiedad para el número 2, que coincide con la igualdad notable ya conocidad:

(i) $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+2ab+b^2 = \tbinom{2}{0}a^2+\tbinom{2}{1}ab+\tbinom{2}{2}b^2$

Ahora, suponemos que la fórmula es verdadera para 'n' y a partir de ella deducimos la correspondiente para '$n+1$'. Este es el paso que hemos visto en el ejemplo 1.1.8 para el caso particular $n=2$.

(ii) $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$$(a+b)^{n+1} = a\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\right)+b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k\right) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} \\
(a+b)^{n+1} &\overset{(*)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k\right) + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k \\
(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k\right) + b^{n+1} \\
(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)a^{n-k+1}b^k\right) + b^{n+1} \\
(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n-k+1}b^k\right) + b^{n+1} \\
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n-k+1}b^k
\end{aligned}
$$

Efectivamente, la última igualdad coincide con la fórmula del binomio de Newton para $n+1$. Aparte de aplicar el mismo desarrollo que en el ejemplo anterior, también hemos "explotado" la ventaja de trabajar con el operador sumantorio. Concretamente, en el segundo sumatorio a la derecha de la igualdad $(*)$, hemos realizado un cambio de índice: hemos sustituido k por $k-1$, de forma que el "nuevo" índice k se mueve de 1 a $n+1$; con este cambio, conseguimos que el interior de los dos sumatorios coincida para casi todos los sumandos, lo que permite hacer las asociaciones y simplificaciones de las igualdades siguientes.

Es posible que la demostración anterior resulte demasiado compleja a estas alturas del curso, pero es conveniente hacer un esfuerzo por entenderlas para poder reproducir el mismo tipo de transformaciones en otros momentos del curso y en otras materias.

1.1.3. Cambio de centro de un polinomio

Un polinomio *centrado en* x_0 es una expresión algebraica de la forma

$$a_n(x-x_0)^n + a_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \cdots + a_2(x-x_0)^2 + a_1(x-x_0) + a_0 \quad (1.4)$$

También se dice que el polinomio esta expresado en *términos de* $(x-x_0)$. Naturalmente, estas expresiones son polinomios y con la ayuda del binomio de Newton podemos transformarlas fácilmente en su forma expandida. Por otra parte, la forma expandida de un polinomio no es mas que el polinomio centrado en $x_0 = 0$.

Veremos que esta forma alternativa de escribir un polinomio puede ser más conveniente que la expandida para determinadas operaciones y por lo tanto es muy importante disponer del siguiente resultado.

TEOREMA 1.1.8 *Para todo número x_0, cualquier polinomio $P(x)$ puede ser escrito de forma única como polinomio centrado en x_0.*

Ocurre muchas veces en matemáticas que la descripción formal de un procedimiento es más compleja que el propio procedimiento. Este es el caso de los métodos que permiten expresar un polinomio expandido en términos de un binomio $(x - x_0)$. Por esta razón, vamos a describir estos métodos sobre ejemplos poco triviales en lugar de intentar hacer una descripción general que tendría muy poca utilidad.

EJEMPLO 1.1.9 Haciendo uso de simples operaciones algebraicas y del binomio de Newton, vamos a expresar el polinomio

$$P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$$

en términos de $(x+1)$. Para ello, sustituimos x por $(x+1)-1$ y expandimos la expresión resultante sin eliminar en ningún momento los paréntesis de $(x+1)$:

$$\begin{aligned} 2x^3-x^2 + 3x - 1 &= 2((x+1)-1)^3 - ((x+1)-1)^2 + 3((x+1)-1) - 1 \\ &= 2((x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 3(x+1) - 1)- \\ &\qquad ((x+1)^2 - 2(x+1) + 1) + 3(x+1) - 3 - 1 \\ &= 2(x+1)^3 - 7(x+1)^2 + 11(x+1) - 7 \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.1.10 Vamos a repetir el ejemplo anterior pero usando las derivadas sucesivas del polinomio. La igualdad que queremos conseguir es la siguiente,

$$P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1 = a_3(x+1)^3 + a_2(x+1)^2 + a_1(x+1) + a_0;$$

Para determinar los coeficientes a_i, vamos a hallar las derivadas sucesivas del polinomio en sus dos representaciones, la incial y la centrada en -1, y evaluaremos ambas expresiones en el nuevo centro:

$$\left.\begin{aligned} P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1 &\Rightarrow P(-1) = -7 \\ P(x) = a_3(x+1)^3 + a_2(x+1)^2 + a_1(x+1) + a_0 &\Rightarrow P(-1) = a_0 \end{aligned}\right\} a_0 = -7$$

$$\left.\begin{aligned} P'(x) = 6x^2 - 2x + 3 &\Rightarrow P'(-1) = 11 \\ P'(x) = 3a_3(x+1)^2 + 2a_2(x+1) + a_1 &\Rightarrow P'(-1) = a_1 \end{aligned}\right\} a_1 = 11$$

$$\left.\begin{aligned} P''(x) = 12x - 2 &\Rightarrow P''(-1) = -10 \\ P''(x) = 3 \cdot 2a_3(x+1) + 2a_2 &\Rightarrow P''(-1) = 2a_2 \end{aligned}\right\} a_2 = -10/2 = -5$$

$$\left.\begin{aligned} P'''(x) = 12 &\Rightarrow P'''(-1) = 12 \\ P'''(x) = 3 \cdot 2a_3 &\Rightarrow P'''(-1) = 3 \cdot 2a_3 \end{aligned}\right\} a_3 = 12/6 = 2$$

Esto nos lleva a la misma expresión que obtuvimos en el ejemplo anterior:

$$2x^3 - x^2 + 3x - 1 = 2(x+1)^3 - 7(x+1)^2 + 11(x+1) - 7$$

En este ejemplo nos hemos parado en la derivada tercera, pero podríamos haber continuado sucesivamente si el grado del polinomio fuera mayor. Un proceso similar pero aplicado a un polinomio cualquiera demuestra la siguiente proposición

PROPOSICIÓN 1.1.9 *Si* $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k$, *entonces* $P^{(k)}(x_0) = a_k \cdot k!$.

EJEMPLO 1.1.11 La tercera forma para llegar a la forma centrada de un polinomio en un centro distinto de 0 hace uso de la división de polinomios. Nuevamente, queremos encontrar los coeficientes a_i tales que

$$P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1 = a_3(x+1)^3 + a_2(x+1)^2 + a_1(x+1) + a_0;$$

Vamos a razonar sobre la parte derecha para justificar el procedimiento que aplicaremos después. Si dividimos $P(x)$ entre $x + 1$ obtenemos:

$$\frac{P(x)}{x+1} = \frac{a_3(x+1)^3 + a_2(x+1)^2 + a_1(x+1) + a_0}{x+1} = \\ = a_3(x+1)^2 + a_2(x+1)^1 + a_1 + \frac{a_0}{x+1}$$

Es decir, $C_1(x) = a_3(x+1)^2 + a_2(x+1)^1 + a_1$ es el cociente y a_0 es el resto de la división. Si ahora dividimos C_1 de nuevo entre $x + 1$,

$$\frac{C_1(x)}{x+1} = \frac{a_3(x+1)^2 + a_2(x+1) + a_1}{x+1} = a_3(x+1) + a_2 + \frac{a_1}{x+1}$$

obtenemos como resto al coeficiente a_1. Podemos seguir así sucesivamente y deducimos que la secuencia a_0, a_1, a_2,... es la de los restos que se obtiene al dividir $P(x)$ entre $x+1$ sucesivamente. Para realizar esta secuencia de divisiones utilizamos el método de Ruffini, cuyos detalles no recordamos aquí pero que se pueden encontrar en cualquier manual de matemáticas de educación secundaria.

	2	−1	3	−1
−1		−2	3	−6
	2	−3	6	−7
−1		−2	5	
	2	−5	11	
−1		−2		
	2	−7		
−1				
	2			

Esto nos lleva a la misma expresión que obtuvimos en los ejemplos anteriores:

$$2x^3 - x^2 + 3x - 1 = 2(x+1)^3 - 7(x+1)^2 + 11(x+1) - 7$$ ____

Está claro que el método del último ejemplo ha sido el más simple y el que menos trabajo supone, sin embargo, es conveniente entender los otros métodos, ya que nos han permitido recordar, aplicar e incluso deducir varias propiedades que usaremos a lo largo del curso.

1.1.4. Polinomios de Taylor

Los polinomios son las funciones elementales más simples, ya que solo hacen uso de las operaciones algebraicas: sumas, restas y productos. La situación ideal es que el resto de las funciones elementales se pudieran convertir en polinomios, pero esto no es cierto en ningún caso. Sin embargo, si es posible "aproximar" cualquier función elemental con polinomios, así como cualquier función que se pueda construir a partir de ellas en determinadas condiciones. Como veremos más detalladamente en el tema siguiente, para establecer un método de aproximación adecuado debemos saber construir una aproximación de una función dada y también debemos poder mejorar la aproximación cuanto deseemos. En esta sección, solo vamos a aprender a construir los polinomios pero será en el tema siguiente cuando aprendamos a controlar los errores al considerar este método de aproximación.

Definición 1.1.10 *El polinomio de Taylor de orden n de la función f en el punto x_0 es un polinomio de grado menor o igual que n tal que su valor en x_0 y el valor de las n primeras derivadas coinciden con los de f.*

Como consecuencia de la proposición 1.1.9, podemos deducir fácilmente la expresión analítica de los polinomios de Taylor.

Proposición 1.1.11 *El polinomio de Taylor es único y viene dado por:*

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots \\ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

El polinomio de Taylor en $x_0 = 0$ se denomina igualmente polinomio de McLaurin.

Ejemplo 1.1.12 Para la función $f(x) = \mathrm{e}^x$, se verifica que $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$ y $f^{(n)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1$ para todo n. Por lo tanto, el polinomio de Taylor de orden n de la función exponencial en el punto 0 es:

$$T(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

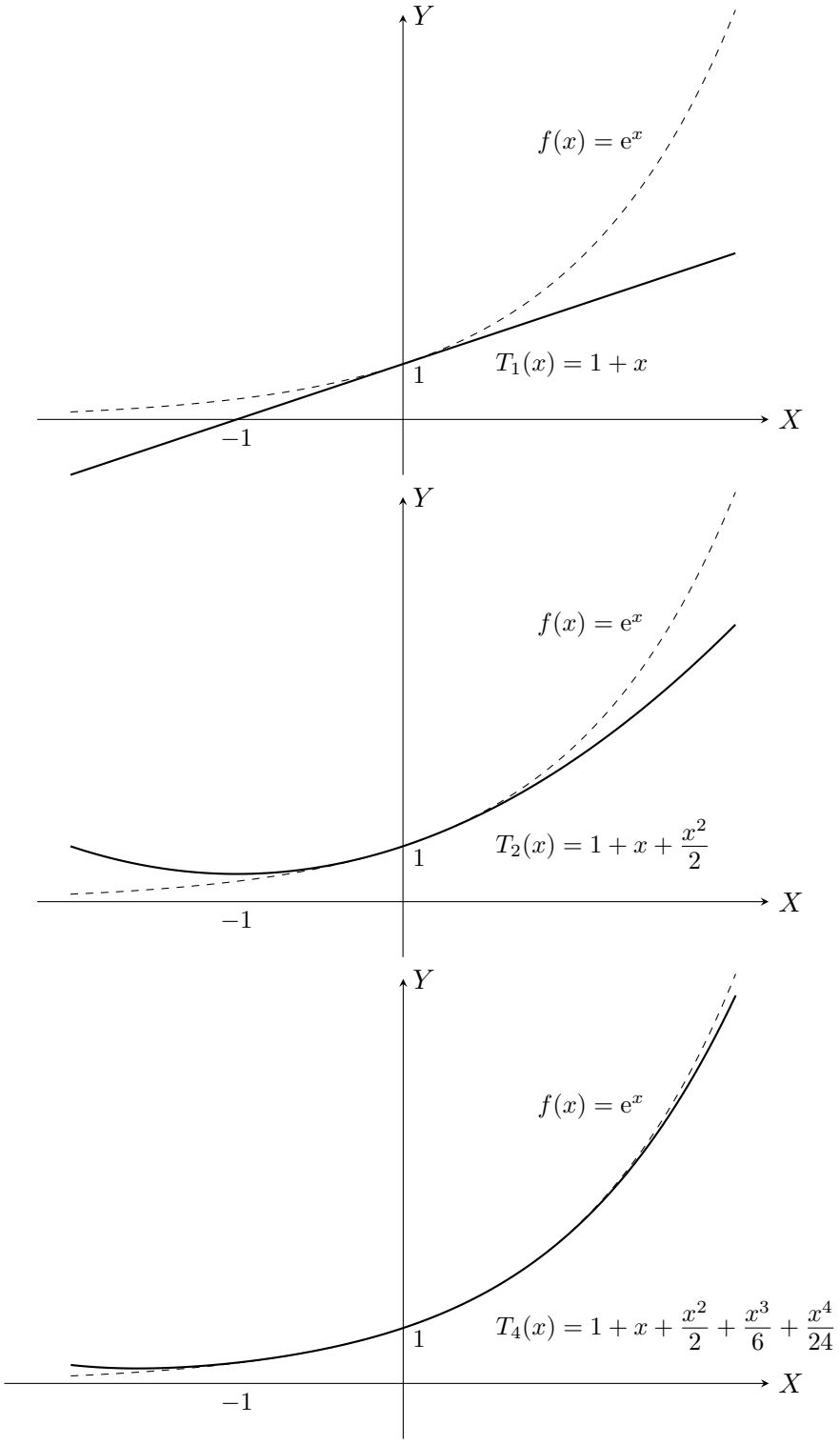


Figura 1.1: Función exponencial y algunos polinomios de Taylor.

En la figura 1.1, aparecen representadas la función exponencial y los polinomios de Taylor de orden 1, 2 y 4. En primer lugar, apreciamos el parecido de la función y sus polinomios, mayor cuanto mayor es el orden y cuanto más cerca estamos del punto $x_0 = 0$. Además, para el caso $n = 1$, observamos que la recta obtenida en su representación coincide con la recta tangente en el punto $x_0 = 0$. ——

Los polinomios de Taylor pueden calcularse en cualquier punto, pero debemos tener en cuenta las siguientes consideraciónes:

- Si queremos utilizarlos para aproximar magnitudes, solo tiene sentido usar los polinomios en los puntos para los cuales los coeficientes obtenidos sean números racionales, ya que el objetivo de cualquier método de aproximación debe ser estimar magnitudes reales con magnitudes racionales.
- Como veremos en el tema siguiente, la posibilidad de controlar los errores cometidos solo la tendremos para las funciones elementales y algunas funciones construidas a partir de ella de forma muy simple. Por lo tanto, nos limitaremos a calcular los polinomios de Taylor de este tipo de funciones.
- También podemos utilizar los polinomios para deducir *propiedades locales* de la funciones, es decir, para estudiar que es lo que ocurre en un entorno "muy pequeño" alrededor de un punto. En estos casos, podremos trabajar con cualquier función y cualquier punto, aunque no necesitaremos calcular completamente los polinomios. Por ejemplo, todos los resultados de clasificación de puntos críticos en los problemas de optimización, se basan en los desarrollos de Taylor.

Ejemplo 1.1.13 Vamos a calcular el polinomio de Taylor de la función $\log x$ (logaritmo neperiano) en $x_0 = 1$. No podemos elegir a 0 como centro, ya que ese punto no está en el dominio; además, el número 1 es el único punto del dominio cuyas derivadas sucesivas son números racionales. Empezamos calculando las primeras derivadas sucesivas de la función $f(x) = \log x$, $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^{-1} \\ f''(x) &= -x^{-2} \\ f'''(x) &= 2x^{-3} \\ f^{(4)}(x) &= -3 \cdot 2x^{-4} \\ f^{(5)}(x) &= 4 \cdot 3 \cdot 2x^{-5} \end{aligned}$$

Podemos observar que:

- Nos aparece alternativamente el signo "−": las derivadas pares son negativas y las impares positivas. Por lo tanto, para el orden de derivación n, el signo será $(-1)^{n-1}$.
- No hemos multiplicado las constantes para poder observar como se construyen: en cada paso de derivación multiplicamos por el siguiente número natural. De esta forma, la constante correspondiente al orden de derivación n es $(n-1)!$.
- Finalmente, en cada derivada, la variable x aparece con un exponente negativo cuyo valor absoluto coincide con el orden de derivación.

Es decir, con la observación de estas primeras derivadas podemos "intuir" que

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}, \quad n \geq 1 \tag{1.5}$$

Sin embargo, debemos hacer una demostración "formal" de esta afirmación usando inducción matemática (ver página 9):

(i) Para $n = 1$: $\quad (-1)^{1-1}(1-1)!x^{-1} = 1 \cdot 1x^{-1} = x^{-1} = f'(x)$.

(ii) Supongamos que la fórmula es válida para n y a partir de ahí, vamos a deducirla para $n+1$.

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n} \\ f^{(n+1)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(n)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}\right) \\ f^{(n+1)}(x) &= -n(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n-1} \\ f^{(n+1)}(x) &= (-1)^{n}n!x^{-(n+1)} \end{aligned}$$

Efectivamente, la última igualdad se corresponde con la fórmula (1.5) sustituyendo n por $n+1$.

Por lo tanto, podemos concluir que la fórmula es válida para todo n.

El resto del ejemplo consiste simplemente en aplicar la fórmula del polinomio de Taylor:

$$\begin{gathered} f(1) = \log 1 = 0, \qquad f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)! \\ T(x) = 0 + 1 \cdot (x-1) - \tfrac{1!}{2!}(x-1)^2 + \tfrac{2!}{3!}(x-1)^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\tfrac{(n-1)!}{n!}(x-1)^n \\ T(x) = (x-1) - \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \tfrac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\tfrac{1}{n}(x-1)^n \\ T(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}(x-1)^k \end{gathered}$$

En general, puede ser bastante complicado hallar los polinomios de Taylor de funciones no elementales a partir de la definición, pero como es habitual en matemáticas, podemos facilitar estos cálculos estudiando el comportamiento respecto de las operaciones algebraicas.

Proposición 1.1.12

1. *El n-ésimo polinomio de Taylor de $f+g$ es la suma de los n-ésimos polinomios de Taylor de f y g*
2. *El n-ésimo polinomio de Taylor de $f \cdot g$ es el producto de los n-ésimos polinomios de Taylor de f y g* desechando los sumandos de grado mayor que n.
3. *El n-ésimo polinomio de Taylor de f/g es el cociente,* obtenido por división larga *hasta el grado n, de los $n+m$-ésimos polinomios de Taylor de f y g, en donde m es el menor grado de los términos del polinomio de g (es decir, el menor natural tal que $g^{(m)}(x_0) \neq 0$).*
4. *El n-ésimo polinomio de Taylor de $f \circ g$ es la composición de los n-ésimos polinomios de Taylor de f y g* desechando los sumandos de grado mayor que n.
5. *La derivada del $(n+1)$–ésimo polinomio de Taylor de f, es el n–ésimo polinomio de Taylor de f'. Esta propiedad se suele aplicar en sentido inverso, a partir del polinomio de f', se obtiene el polinomio de f.*

A partir de estas propiedades y de los desarrollos de funciones elementales, es posible estudiar una amplia familia de funciones. Debemos observar sin embargo, que no siempre es práctico o útil el uso de los desarrollos de Taylor para funciones arbitrarias, ya que su cálculo directo puede ser imposible y aunque la aplicación de las propiedades anteriores ayude en algunos casos, no proporciona una forma alternativa para calcular los restos, necesarios en el control de errores. No obstante, estas propiedades sí pueden ser útiles para otras aplicaciones de polinomio de Taylor.

1.1.5. Compleción cuadrados

La compleción de cuadrados es una simple transformación de polinomios de grado 2 pero cuya aplicación permite resolver muchos problemas, lo que hace que su uso sea bastante común en Matemáticas: resolución de ecuaciones de segundo grado, estudio y representación de parábolas, simplificación de expresiones,...

La expresión de un polinomio de grado 2 centrado en un número x_0 es:

$$P(x) = b_2(x-x_0)^2 + b_1(x-x_0) + b_0$$

Si $b_1 = 0$, decimos que la expresión tiene *cuadrados completos*, ya que la variable x no aparece en un término de grado 1. Aunque los métodos mostrados en la sección anterior nos dan distintas formas de hallar el valor de x_0 y la expresión centrada en x_0, en este caso es preferible usar simplemente identificación de coeficientes para lograr una igualdad del tipo:

$$ax^2 + bx + c = a(x + A)^2 + B$$

EJEMPLO 1.1.14 Vamos a transformar el polinomio $2x^2 - 3x + 1$ usando identificación de coeficientes:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x + 1 &= 2(x + A)^2 + B \\ 2x^2 - 3x + 1 &= 2(x^2 + 2Ax + A^2) + B \\ 2x^2 - 3x + 1 &= 2x^2 + 4Ax + 2A^2 + B \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$4A = -3 \Rightarrow A = -3/4, \qquad 2A^2 + B = 1 \Rightarrow B = 1 - 2\frac{9}{16} = -\frac{1}{8}$$

y de ahí: $2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$. ——

Es preferible, no obstante, aprender a realizar esta transformación de una forma más rápida y que denominaremos *compleción de cuadrados*. Para introducirla antes de aplicarla en el siguiente ejemplo, vamos a fijarnos en un caso particular muy simple, el polinomio $x^2 + bx$; para este polinomio, teniendo en cuenta la fórmula del cuadrado de un binomio, es bastante fácil observar que la transformación tendrá la forma

$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \ldots$$

Si elevamos al cuadro "mentalmente", nos aparece el número $b^2/4$, que no está en el lado izquierdo, y por lo tanto debemos eliminarlo; ya sabemos que es lo que tenemos que poner en los "puntos suspensivos".

$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}$$

Hemos preferido explicar de esta forma la fórmula anterior (que por otra parte es inmediata) para describir cual debe ser la forma en la que razonemos la transformación en el caso general.

EJEMPLO 1.1.15 Vamos a transformar el polinomio $2x^2-4x+1$ usando compleción de cuadrados:

$$\begin{aligned} 2x^2-4x-1 &= 2\left(\underbrace{x^2-2x}-\frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(\underbrace{((x-1)^2-1)}-\frac{1}{2}\right) \\ &= 2(x-1)^2-2-1 \\ &= 2(x-1)^2-3 \end{aligned}$$

En la primera igualdad hemos sacado factor común 2 para que nos quede el caso trivial comentado antes. Los dos sumandos subrayados con la llave son los que contienen la variable x y que son sustituidos por el "cuadrado perfecto" según hemos visto antes. ——

1.1.6. Forma factorizada de un polinomio

Según hemos visto, todo polinomio puede ser escrito desplazando su centro a un punto cualquiera x_0. A partir de la expresión 1.4 así obtenida, es fácil deducir la siguiente propiedad.

PROPOSICIÓN 1.1.13 *Si $P(x_0)=0$, entonces $P(x)$ es divisible por $x-x_0$.*

Las soluciones de la ecuación $P(x)=0$ se denomina igualmente *raíces* del polinomio P. Veremos en la lección siguiente que la propiedad anterior es válida incluso para soluciones complejas y estableceremos los resultados necesarios para demostrar el siguiente resultado.

TEOREMA 1.1.14 *Todo polinomio $P(x)$ puede ser escrito siguiendo el esquema*

$$\begin{aligned} P(x) = a(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\dots(x-a_p)^{n_p} \\ (x^2+b_1x+c_1)^{m_1}(x^2+b_2x+c_2)^{m_2}\dots(x^2+b_qx+c_q)^{m_q}, \end{aligned}$$

siendo $a_1,\dots,a_p$ las raíces reales de P y en donde los polinomios $x^2+b_ix+c_i$ no tiene raíces reales. Los números naturales n_i y m_j son la multiplicidad *de las correspondientes raíces.*

La descomposición dada por este teorema se dice que es la *factorización en* $\mathbb{R}$ del polinomio. La proposición 1.1.13 nos da flexibilidad para obtener esta factorización utilizando indistintamente la resolución de ecuaciones o la manipulación algebraica del polinomio.

Ejemplo 1.1.16

1. $x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1)$; el polinomio x^2+1 no tiene raíces reales.

2. Para factorizar x^3+2x^2+2x+1 buscamos alguna raíz real usando Ruffini. Dado que el coeficiente del término de mayor grado es 1 buscamos las raíces entre los divisores del término independiente, 1 y -1

	1	2	2	1
-1		-1	-1	-1
	1	1	1	0

El polinomio que queda como cociente, x^2+x+1, no tiene raíces reales,

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \notin \mathbb{R},$$

y por lo tanto, la factorización buscada es

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^2+x+1)(x+1)$$ ——

1.1.7. Funciones racionales y fracciones simples

Las funciones expresadas como cociente de polinomios se denominan *funciones racionales*. En función de los grados de los polinomios se clasifican en *propias*, si el grado del denominador es mayor que el grado del numerador, e *impropias*, si el grado del denominador es menor o igual que el grado del numerador.

Ejemplo 1.1.17

1. Las funciones $\dfrac{x^2-x}{x+3}$ y $\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}$ son funciones racionales impropias.

2. La función racional $\dfrac{5x+4}{x^2-2x-8}$ es propia. ——

Proposición 1.1.15 *Cualquier función racional se puede expresar como suma de un polinomio y de una función racional propia.*

Para lograr esa transformación basta dividir los dos polinomios y aplicar la igualdad

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

en donde $C(x)$ el cociente y $R(x)$ el resto de dividir $P(x)$ entre $Q(x)$.

EJEMPLO 1.1.18 La función racional $\dfrac{x^6-2}{x^4+x^2}$ no es propia; dividimos para obtener la expresión de la proposición anterior.

$$\begin{array}{rl|l} \cancel{x^6} & -2 & x^4+x^2 \\ \cline{3-3} -\cancel{x^6} & -x^4 & x^2-1 \\ \cline{1-2} & \cancel{x^4}\ -2 & \\ & \cancel{+x^4}\ +x^2 & \\ \cline{2-2} & +x^2-2 & \end{array}$$

Mostramos, pero no explicamos, los detalles de la división, que pueden consultarse en cualquier manual de matemáticas de secundaria. Ya podemos escribir la descomposición deseada.

$$\frac{x^6-2}{x^4+x^2} = x^2-1+\frac{x^2-2}{x^4+x^2}$$ ——

DEFINICIÓN 1.1.16 (FRACCIÓN SIMPLE) *Las funciones racionales*

$$\frac{A}{(ax+b)^n}, \qquad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n},$$

en donde, $n \in \mathbb{N}$, $A, B, a, b, c \in \mathbb{R}$ *y* ax^2+bx+c *no tiene raíces reales, se denominan* fracciones simples.

Por ejemplo,

$$\frac{3}{2x+1}, \qquad \frac{-5}{x^3-3x^2+3x-1} = \frac{-5}{(x-1)^3},$$
$$\frac{x}{2x^2+2x+1}, \qquad \frac{1-x}{x^4+8x^2+16} = \frac{1-x}{(x^2+4)^2},$$

son fracciones simples. Sin embargo,

- $\dfrac{x}{x-2}$ no es fracción simple, ya que el numerador no es una constante;
- $\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ no es simple, ya que el numerador tiene grado 2;
- $\dfrac{1}{x^3+4x}$ no es simple, ya que el denominador, $x(x^2+4)$, no se corresponde con una potencia de un polinomio de grado 1, ni con una potencia de un polinomio de grado 2;
- $\dfrac{2x+5}{(x^2-4)^3}$ no es simple, ya que el polinomio x^2-4 tiene raíces reales.

PROPOSICIÓN 1.1.17 *Cualquier función racional propia se puede expresar como suma de fracciones simples.*

Esta transformación la conseguimos con los siguientes pasos:

- **Paso 1:** Factorizamos en $\mathbb{R}$ el polinomio $Q(x)$ del denominador:

$$Q(x) = a(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\dots(x-a_p)^{n_p} \\ (x^2+b_1x+c_1)^{m_1}(x^2+b_2x+c_2)^{m_2}\dots(x^2+b_qx+c_q)^{m_q}$$

- **Paso 2:** A partir de la descomposición anterior, se puede afirmar que la función racional se puede descomponer de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{1}{a_0}\cdot\Bigg[&\left(\frac{A_{11}}{x-a_1}+\frac{A_{12}}{(x-a_1)^2}+\dots+\frac{A_{1n_1}}{(x-a_1)^{n_1}}\right)+\\ &+\left(\frac{A_{21}}{x-a_2}+\frac{A_{22}}{(x-a_2)^2}+\dots+\frac{A_{2n_2}}{(x-a_2)^{n_2}}\right)+\\ &+\dots+\\ &+\left(\frac{A_{p1}}{x-a_p}+\frac{A_{p2}}{(x-a_p)^2}+\dots+\frac{A_{pn_p}}{(x-a_p)^{n_p}}\right)+\\ &+\left(\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+b_1x+c_1}+\dots+\frac{B_{1m_1}x+C_{1m_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}}\right)+\\ &+\left(\frac{B_{21}x+C_{21}}{x^2+b_2x+c_2}+\dots+\frac{B_{2m_1}x+C_{2m_1}}{(x^2+b_2x+c_2)^{m_2}}\right)+\\ &+\dots+\\ &+\left(\frac{B_{q1}x+C_{q1}}{x^2+b_qx+c_q}+\dots+\frac{B_{qm_q}x+C_{qm_q}}{(x^2+b_1x+c_1)^{m_q}}\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{1.6}$$

  que tiene tantos sumando como factores tiene el denominador. Para cada raíz real, se consideran tantos sumandos como su multiplicidad, en donde los denominadores son las potencias sucesivas del correspondiente factor y los numeradores son constantes. Para cada factor de grado 2 irreducible, se consideran tantos sumandos como su multiplicidad, en donde los denominadores son las potencias sucesivas del correspondiente factor y los numeradores son polinomios de grado 1.

- **Paso 3:** Para terminar de calcular la descomposición, debemos hallar los valores de los parámetros A_{ij}, B_{ij} y C_{ij}. Esto lo hacemos sumando la parte derecha de la igualdad (1.6) (obsérvese que el mínimo común multiplo de los denominadores es exactamente $Q(x)$) e igualando los coeficientes del numerador resultante con $P(x)$. El problema a resolver será siempre un sistema de ecuaciones lineales.

Ejemplo 1.1.19 Mostramos el proceso de descomposición en fracciones sim-

ples de la función racional propia $\dfrac{x^2-2}{x^4+x^2}$.

$$\begin{aligned}\frac{x^2-2}{x^4+x^2} &= \frac{x^2-2}{x^2(x^2+1)} \quad [\text{Factorizamos el denominador,}\dots\\ &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1} \quad [\text{aplicamos el esquema de descomposición,}\dots\\ &= \frac{Ax(x^2+1)+B(x^2+1)+x^2(Cx+D)}{x^2(x^2+1)} \quad [\text{sumamos}\dots\\ &= \frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+Ax+B}{x^2(x^2+1)} \quad [\text{y agrupamos.}\end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de los polinomios de los numeradores, obtenemos el siguiente sistema de 4 ecuaciones y 4 incógnitas:

$$\begin{cases} B &= -2\\ A &= 0\\ B+D &= 1\\ A+C &= 0\end{cases}$$

cuya solución es $A=0$, $B=-2$, $C=0$ y $D=3$. Por lo tanto:

$$\frac{x^2-2}{x^4+x^2} = -\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^2+1} \qquad \text{——}$$

Ejemplo 1.1.20 La siguiente función racional también es propia y por lo tanto no es necesario dividir los polinomios:

$$\frac{6x^5+16x^4+22x^3+18x^2+20x-1}{(x-1)^2(x+2)(x^2+x+1)^2}$$

El denominador ya está factorizado, así que podemos pasar directamente a escribir la descomposición en fracciones simples:

$$\begin{aligned}&\frac{6x^5+16x^4+22x^3+18x^2+20x-1}{(x-1)^2(x+2)(x^2+x+1)^2} =\\ &\qquad = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}+\frac{Fx+G}{(x^2+x+1)^2}\end{aligned}$$

Sumamos la expresión de la derecha tomando el denominador inicial como mínimo común múltiplo y obtenemos la siguiente igualdad de numeradores

$$\begin{aligned}&6x^5+16x^4+22x^3+18x^2+20x-1 =\\ &= A(x-1)(x+2)(x^2+x+1)^2+B(x+2)(x^2+x+1)^2+C(x-1)^2(x^2+x+1)^2+\\ &\quad +(Dx+E)(x-1)^2(x+2)(x^2+x+1)+(Fx+G)(x-1)^2(x+2) =\\ &= (A+C+D)x^6+(3A+B+D+E)x^5+(3A+4B-2D+E+F)x^4+\\ &\quad +(A+7B-2C-D-2E+G)x^3+(-3A+8B+D-E-3F)x^2+\\ &\quad +(-3A+5B+2D-E+2F-3G)x+(-2A+2B+C+2E+2G)\end{aligned}$$

Por lo que, igualando coeficientes, obtenemos el siguiente sistema de siete ecuaciones lineales con siete incógnitas:

$$\left.\begin{array}{rcrcl} x^6 & \to & 0 & = & A+C+D \\ x^5 & \to & 6 & = & 3A+B+D+E \\ x^4 & \to & 16 & = & 3A+4B-2D+E+F \\ x^3 & \to & 22 & = & A+7B-2C-D-2E+G \\ x^2 & \to & 18 & = & -3A+8B+D-E-3F \\ x^1 & \to & 20 & = & -3A+5B+2D-E+2F-3G \\ 1 & \to & -1 & = & -2A+2B+C+2E+2G \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A & = & 1 \\ B & = & 3 \\ C & = & -1 \\ D & = & 0 \\ E & = & 0 \\ F & = & 1 \\ G & = & -2 \end{array}\right.$$

Por tanto, la descomposición final es:

$$\frac{6x^5+16x^4+22x^3+18x^2+20x-1}{(x-1)^2(x+2)(x^2+x+1)^2} = \\ = \frac{1}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{1}{x+2}+\frac{x-2}{(x^2+x+1)^2}$$

———

Ejemplo 1.1.21 Mostramos varios ejemplos de funciones racionales y las correspondientes descomposiciones sin mostrar los detalles de los cálculos intermedios.

1. $\dfrac{x^2-x}{x+3} = x-4+\dfrac{12}{x+3}$

2. $\dfrac{x^4-3}{x^2+x+1} = x^2-x+\dfrac{x-3}{x^2+x+1}$

3. $\dfrac{x+5}{x^2+x-2} = \dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}$

4. $\dfrac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3} = 2x+\dfrac{5x-5}{(x+1)(x-3)} = 2x+\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{x-3}$

5. $\dfrac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} = \dfrac{x^2+2x-1}{2x(x-\frac{1}{2})(x+2)} = \dfrac{1/2}{x}+\dfrac{1/5}{2x-1}-\dfrac{1/10}{x+2}$

6. $\dfrac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1} = x+1+\dfrac{4x}{x^3-x^2-x+1} = \\ = x+1+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{x+1}$

7. $\dfrac{2x^3-4x-8}{x^4-x^3+4x^2-4x} = \dfrac{2x^3-4x-8}{x(x-1)(x^2+4)} = \dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{2x+4}{x^2+4}$

8. $\dfrac{9+2x+7x^2+5x^4-2x^5}{x^4+x^2+1} = 5-2x+\dfrac{2x^3+2x^2+4x+4}{x^4+x^2+1} =$
$$= 5-2x+\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{3}{x^2-x+1}$$

9. $\dfrac{2x^3+x}{(x^2+x+1)(x^2+1)} = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}-\dfrac{1}{x^2+1}$

10. $\dfrac{x^2}{x^4+2x^2+1} = \dfrac{x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$

11. $\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x^2+2)^2} = \dfrac{2/9}{x-1}-\dfrac{2/9(x+1)}{x^2+2}+\dfrac{1/3(x+1)}{(x^2+2)^2}$ ——

1.1.8. Sistemas de ecuaciones

Una ecuación es una igualdad del tipo

$$\mathrm{e}_1(x) = \mathrm{e}_2(x) \tag{1.7}$$

que se supone válida para algunos valores de x; resolver esa ecuación consiste en determinar esos valores de x. Para resolver la ecuación 1.7, realizamos las mismas operaciones o aplicamos las mismas funciones a ambos lados del símbolo de igualdad hasta llegar a una o varias igualdades del tipo $x = \ldots$, de tal forma que en el lado derecho no aparece la variable x. Si la función aplicada a ambos lados de la igualdad es biyectiva, tenemos asegurado que la ecuación obtenida es equivalente, es decir, tiene las mismas soluciones; sin embargo, si la función no es biyectiva, podemos añadir o eliminar soluciones a la ecuación. Por esta razón, si usamos funciones no biyectivas en los pasos intermedios de la resolución, deberemos verificar los resultados obtenidos.

Ejemplo 1.1.22 Para resolver la ecuación

$$\sqrt{x} = \sqrt{x^2+x-1}$$

debemos elevar al cuadrado ambos miembros; esta operación no es biyectiva y por lo tanto puede generar soluciones incorrectas:

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= \sqrt{x^2+x-1}\\ x &= x^2+x-1\\ 0 &= x^2-1\\ x^2 &= 1\\ x_1 = 1, &\quad x_2 = -1\end{aligned}$$

Efectivamente, la solución $x_2 = -1$ no es válida, ya que no tendría sentido tomar la raíz cuadrada en el miembro izquierdo de la ecuación inicial. ——

Ejemplo 1.1.23 Para resolver la ecuación

$$x^3 - 2x^2 + x = 0$$

podemos dividir ambos miembros por x, obteniedo una ecuación de segundo grado:

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + x &= 0 \\ x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ (x-1)^2 &= 0 \\ x - 1 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

En este caso, al dividir por x hemos "perdido" una solución, ya que tenemos que suponer a partir de ahí que $x \neq 0$; sin embargo, $x = 0$ también es solución. Hemos elegido este ejemplo tan simple para mostrar las precauciones que debemos tener; sin embargo, debemos recordar lo que hemos visto en las secciones anteriores para abordar este tipo de ejercicios. Buscaríamos la factorización del polinomio para determinar todas las soluciones:

$$0 = x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, x_2 = 1$$ ——

Ejemplo 1.1.24 La fórmula que habitualmente usamos para resolver las ecuaciones de segúndo grado es una consecuencia de la compleción de cuadrados que hemos estudiado en la sección 1.1.5.

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 \\ ((x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}) - 2 &= 0 \\ (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} &= 0 \\ (x - \frac{1}{2})^2 &= \frac{9}{4} \\ x - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, &\qquad x - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \\ x = 2, &\qquad x = -1 \end{aligned}$$ ——

Ejemplo 1.1.25 Para resolver sistemas de ecuaciones lineales usamos preferiblemente el método de Gauss (o reducción). Las ecuaciones se multiplican por constantes y se suman para conseguir reducir el número de incognitas. Resolvemos el siguiente sistema usando este método; para seguir el desarrollo, utilizamos indicaciones sobre las operaciones realizadas; por ejemplo, (e2) − (e1) indica que a la ecuación 2 le restamos la ecuación 1 y 2 ∗ (e2) indica que la segunda ecuación se multiplica por 2.

$$\left\{\begin{array}{rl} x+y-z & =1 \\ x+2y+2z & =2 \\ -x+y+3z & =-2 \end{array}\right\} \overset{(e2)-(e1)}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{rl} x+y-z & =1 \\ y+3z & =1 \\ -x+y+3z & =-2 \end{array}\right\}$$

$$\overset{(e3)+(e1)}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{rl} x+y-z & =1 \\ y+3z & =1 \\ 2y+2z & =-1 \end{array}\right\} \overset{2*(e2)}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{rl} x+y-z & =1 \\ 2y+6z & =2 \\ 2y+2z & =-1 \end{array}\right\}$$

$$\overset{(e3)-(e2)}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{rl} x+y-z & =1 \\ 2y+6z & =2 \\ -4z & =-3 \end{array}\right\}$$

Podemos observar que la reducción de incognitas se ha realizado hasta lograr un *sistema triangular*, es decir, la última ecuación tiene solo una incógnita, la segunda dos incognitas y la primera mantiene la tres; el mismo proceso puede utilizarse con mayor número de incógnitas y de ecuaciones. A partir de aquí, la resolución se completa fácilmente:

$$\left.\begin{array}{l} (e3) \Rightarrow \boxed{z=\frac{3}{4}} \\ \qquad\qquad (e2) \end{array}\right\} \Rightarrow 2y+6\frac{3}{4}=2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{y=-\frac{5}{4}} \\ \qquad\qquad (e1) \end{array}\right\} \Rightarrow x-\frac{5}{4}-\frac{3}{4}=1 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

$\blacksquare$

El método de Gauss, que hemos recordado en el ejemplo anterior, es un sistema automático y eficiente para su resolución de sistemas de ecuaciones lineales, sin embargo, no disponemos de algoritmos o métodos similares para sistemas de ecuaciones no lineales y, en la mayoría de los casos, tendremos que recurrir a la intuición y a la experiencia para abordar con éxito su resolución.

En el resto de la sección, vamos a resolver sistemas de ecuaciones no lineales y en concreto, de tipo polinómico. Una primer estrategia será utilizar el método de sustitución que utilizamos para las ecuaciones lineales, pero de una manera ordenada; para ello, seguiremos los siguientes pasos:

1. Elegir una de las ecuaciones y extraer toda la información que sea posible. Se elige una ecuación que sea sencilla de factorizar o en la que sea sencillo despejar una variable.

2. La información obtenida se sustituye o añade al resto de las ecuaciones. De esta forma podemos hacer desaparecer la ecuación correspondiente y obtener uno o varios subproblemas más sencillos (con menos ecuaciones o con menos incógnitas).

3. Repetir los pasos anteriores en cada uno de los subproblemas.

Hay que tener en cuenta que estos sistemas pueden tener varias soluciones y describirlas consiste en dar el valor de cada una de las variables que interviene en el sistema.

Ejemplo 1.1.26 Para resolver el sistema

$$\begin{aligned} a^2 - b &= 5 \\ 3a - b &= 1 \end{aligned}$$

elegimos la segunda ecuación $3a - b = 1$, ya que es lineal y permite despejar fácilmente una de las variables en función de la otra: $b = 3a - 1$; esta igualdad recoge toda la información de la segunda ecuación, así que la "guardamos" y sustituimos b en la otra ecuación:

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 - b = 5 \\ 3a - b = 1 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} a^2 - (3a - 1) = 5 \\ b = 3a - 1 \end{array} \right\}$$

Así, hemos logrado el mismo objetivo que con los sistemas lineas al reducirlos a un sistema triangular; podemos resolver la primera ecuación para obtener los posibles valores de a y utilizamos la segunda para obtener los correspondientes valores de b.

$$\begin{gathered} a^2 - (3a - 1) = 5 \Rightarrow a = -1 \ \text{ y } \ a = 4 \\ a = -1 \Rightarrow b = -4 \\ a = 4 \Rightarrow b = 11 \end{gathered}$$

Es importante entender que el sistema tiene "dos" soluciones que son los dos posible valores que puede tomar el par (a, b):

$$(a, b) = (-1, -4) \qquad (a, b) = (4, 11)$$ ——

Ejemplo 1.1.27 Para resolver el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - xy = 0 \\ x - yz = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{array} \right. ,$$

elegimos la primera ecuación, ya que es fácil factorizarla:

$$0 = 2x - xy = x(2 - y).$$

Extraemos toda la información posible: para que el producto sea 0, o bien $x = 0$, o bien $y = 2$. Esto nos da dos posibilidades distintas con las que

planteamos dos subproblemas:

$$(1)\begin{cases} x=0 \\ yz=0 \\ y^2+z^2=1 \end{cases} \quad \text{y} \quad (2)\begin{cases} y=2 \\ x-2z=0 \\ x^2+4+z^2=1 \end{cases}$$

Para resolver (1), elegimos la segunda ecuación, $yz = 0$, y obtenemos que, o bien $y = 0$, o bien $z = 0$; cada una de estas posibilidades es aplicada a la tercera ecuación, $y^2 + z^2 = 1$, para obtener dos nuevos subproblemas:

$$(1)\begin{cases} x=0 \\ yz=0 \\ y^2+z^2=1 \end{cases} \Longrightarrow \quad (1.1)\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z^2=1 \end{cases} \quad \text{y} \quad (1.2)\begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ y^2=1 \end{cases}$$

Terminamos de resolver los sistemas obteniendo las soluciones $(0, 0, -1)$ y $(0, 0, 1)$ para las variables (x, y, z) del subproblema (1.1) y $(0, -1, 0)$ y $(0, 1, 0)$ para el subproblema (1.2).

Para resolver (2), elegimos la segunda ecuación, $x - 2z = 0$, despejamos z para obtener la condición $z = x/2$ y sustituirla en la tercera ecuación, $y^2 + z^2 = 1$:

$$(2)\begin{cases} y=2 \\ x-2z=0 \\ x^2+4+z^2=1 \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{cases} y=2 \\ z=\frac{x}{2} \\ x^2+4+(\frac{x}{2})^2=1 \end{cases}$$

Como la tercera ecuación no tiene solución, deducimos que este subproblema no aporta ninguna solución al sistema, y por lo tanto, los únicos valores de las variables (x, y, z) que son soluciones del sistema son $(0, 0, -1)$, $(0, 0, 1)$, $(0, -1, 0)$ y $(0, 1, 0)$. ——

Ejercicios básicos

1. Resuelva las siguientes ecuaciones y comprobar los resultados:

   a) $x - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{x+2}{3} - \frac{x-8}{2} \right) = 3(x-4) - 5(x-8)$ (Sol: $x = 10$)

   b) $x^2 - 4x + 3 = 0$ (Sol: $x = 1\,,\ 3$)

   c) $2x^3 - 14x + 12 = 0$ (Sol: $x = 1,\ 2,\ -3$)

   d) $y \cdot (y^2 - 1) = 0$ (Sol: $y = 0,\ \pm 1$)

   e) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ (Sol: $x = \pm 1\,,\ \pm\sqrt{2}$)

   f) $\sqrt{u+13} - u = 1$ (Sol: $u = 3$)

2. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones usando el método *de reducción* o *de Gauss*:

   a) $\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$ (Sol: $(x, y) = (1, 4)$)

   b) $\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 2x - y - z = 6 \\ 3x - 2y + 2z = 10 \end{cases}$ (Sol: $(x, y, z) = (4z + 2, 7z - 2, z)$)

3. Determine el valor de los siguientes números combinatorios expresando el resultado de la forma más simple posible:

$$\binom{n+1}{n-1}, \qquad \binom{-1/2}{3}$$

4. Use la fórmula del Binomio de Newton para expandir la expresión polinómica $(2x + 3y^3)^3$.

5. Obtenga la forma centrada en -1 del polinomio $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Resuelva este ejercicio usando las distintas formas estudiadas en el tema.

6. Para la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, determine los polinomios de Taylor de órdenes 1, 2, 3, 4 y 5 en $x_0 = 0$. Deduzca la expresión de su polinomio de Taylor de cualquier orden.

7. Consideremos la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$:

   a) Use la definición para determinar el polinomio de Taylor de $f(x)$, de orden 5 en el punto $x_0 = 0$.

   b) Use la proposición 1.1.12 para hallar el polinomio del apartado anterior.

8. Obtenga la forma factorizada de los siguientes polinomios

$$x^3 - 12x + 16, \quad x^4 - 18x^2 + 81, \quad x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 18x + 27.$$

9. Transforme los siguientes polinomios usando la técnica de completar cuadrados:

$$9x^2 - 6x + 7, \qquad 5x^2 + 7x - 2, \qquad 3x^2 + 1.$$

10. Descomponga en suma de fracciones simples:

$$\frac{x^3}{x^2 + x - 2}, \qquad \frac{1}{x(x-1)^2}, \qquad \frac{1}{x^3 + x^2 + x}.$$

11. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} xy = 4y \\ x^2 + y^2 = 25 \\ xyz = 180 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 2z - 5 \end{cases}$$

LECCIÓN 1.2

Los números complejos

Antes de introducir el *cuerpo de los números complejos*, recordemos las propiedades de los distintos conjuntos numéricos con los que hemos trabajado hasta ahora.

Números naturales: El conjunto de los números *naturales* se denota por $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Este conjunto es un *semigrupo conmutativo* respecto de la suma y también respecto del producto. Es decir, las dos operaciones son *asociativas*, el 0 es el *elemento neutro* para la suma, el 1 es la *unidad* para el producto y las dos operaciones son *conmutativas*. Además, se verifica la *propiedad distributiva* del producto respecto de la suma.

Números enteros: El conjunto de los números enteros se denota por $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \cup \{-1, -2, -3, \dots\}$$

Este conjunto tiene estructura de *anillo conmutativo* para la suma y el producto. Es decir, además de las propiedades de los naturales mencionadas en el apartado anterior, en $\mathbb{Z}$ disponemos de *elemento opuesto* para la suma.

Números racionales: El conjunto se denota por $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; p, q \text{ enteros primos entre sí}, q \neq 0 \right\}$$

Este conjunto tiene estructura de *cuerpo*. Es decir, además de las propiedades de los enteros mencionadas en el apartado anterior, en $\mathbb{Q}$ disponemos de *elemento inverso* para el producto.

Por otra parte, la relación de orden usual entre los racionales hace que $\mathbb{Q}$ tenga estructura de *cuerpo ordenado*, es decir, verifica las propiedades siguientes:

1. *Ley de tricotomía*: (es decir, el orden es *total*) cada par de números a y b verifican una y solo una de las siguientes relaciones:

$$a = b \qquad a < b \qquad b < a$$

2. *La suma es cerrada:* si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a + b > 0$.
3. *El producto es cerrado:* si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $ab > 0$.

Números reales El conjunto de los números reales se denota por $\mathbb{R}$ y también es un cuerpo ordenado. La propiedad que caracteriza este cuerpo es la de ser *completo*: toda sucesión de números reales creciente y acotada es convergente. Además, este es el único cuerpo que tiene esta propiedad. Los temas siguientes el significado y consecuencias de esta propiedad.

La extensión desde $\mathbb{N}$ hasta $\mathbb{Q}$ se hace por criterios puramente algebraicos: hasta conseguir un cuerpo ordenado, es decir, un cuerpo con un orden total compatible con las operaciones. La extensión de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ se hace por criterios *topológicos* y la extensión a los números complejos que vemos en este tema vuelva a hacerse por criterios algebraicos: buscamos un cuerpo que extienda a $\mathbb{R}$ y en el cual todas las ecuaciones polinómicas tengan solución, ya que, por ejemplo, la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$.

1.2.1. El cuerpo de los complejos

TEOREMA 1.2.1 *En el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definimos las siguientes operaciones:*

- *Suma:* $(a, b) + (c, \mathrm{d}) = (a + c, b + \mathrm{d})$
- *Producto:* $(a, b)(c, \mathrm{d}) = (ac - b\mathrm{d}, a\mathrm{d} + bc)$

Estas operaciones dan al conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ estructura de cuerpo; denotaremos a este cuerpo por $\mathbb{C}$ y sus elementos se denominan números complejos.

Para demostrar de este teorema es necesario construir los elementos *neutro* y *unidad* así como los elementos opuesto e inverso a uno dado:

- Elemento neutro: $(0, 0)$
- Elemento opuesto: $-(a, b) = (-a, -b)$
- Elemento unidad: $(1, 0)$
- Elemento inverso: si $(a, b) \neq (0, 0)$, entonces

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right).$$

Proponemos como ejercicio la comprobación de las propiedades de cuerpo para los números complejos. Por otra parte, el siguiente resultado establece que efectivamente el cuerpo que acabamos de definir extiende al cuerpo de los reales.

Teorema 1.2.2
$\mathbb{R} \times \{0\}$ *es un subcuerpo de* $\mathbb{C}$ *isomorfo a* $\mathbb{R}$.

En la asignatura de *Estructuras algebraicas* se estudiarán con detalle los conceptos usados en este resultado (isomorfismo y subcuerpo), por lo que aquí nos quedaremos simplemente con su significado intuitivo. Para poder decir que el cuerpo de los complejos *extiende* a los números reales, debemos identificar los números complejos que son también reales; el teorema anterior dice estos números son los pares de la forma $(a, 0)$. Al realizar cualquier operación entre ellos, obtenemos un número de la misma forma y que coincide con la operación correspondiente en los números reales:

$$\begin{aligned}(a,0)+(b,0) &= (a+b,0)\\ (a,0)(b,0) &= (ab,0)\\ (a,0)^{-1} &= (a^{-1},0)\end{aligned}$$

La representación de los números complejos como pares de números reales constituye una herramienta formal conveniente para el estudio teórico del cuerpo. Sin embargo, vamos a estudiar otras representaciones más adecuadas para operar con ellos. Para introducir la *forma binómica*, observemos la siguiente igualdad:

$$(a,0)+(b,0)(0,1) = (a,0)+(0,b) = (a,b) \tag{1.8}$$

En el lado izquierdo, aparecen dos números que hemos identificado con números reales,

$$(a,0) = a, \quad (b,0) = b,$$

y un número complejo no real, $(0, 1)$; en adelante, denotaremos con la letra i a este número y lo llamaremos núemro *imaginario*: $i = (0, 1)$. Atendiendo a la igualdad 1.8, podemos escribir cualquier número complejo como:

$$(a,b) = (a,0)+(b,0)(0,1) = a + b \cdot \mathrm{i}$$

La expresión $a+b\cdot$i es la *forma binómica* del número (a, b). Esta representación facilita la comprensión de los números complejos como extensión del cuerpo de los números reales:

> Al conjunto de los números reales añadimos un nuevo número, denotado por i y que verifica que $\mathrm{i}^2 = -1$; los números complejos son los que se obtienen al combinar y operar el nuevo número con los números reales.

Evidentemente, ningún número real verifica la igualdad $x^2 = -1$, pero sí el número imaginario i dentro de los números complejos:

$$\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$$

Ejemplo 1.2.1 La primera consecuencia práctica de la representación binómica es que, en adelante, operaremos con los números complejos de la misma forma que estamos acostumbrados a operar con números reales. Todas las manipulaciones que hemos aprendido hasta ahora se basan en las propiedades de las operaciones que hemos comentado anteriormente (asociatividad, conmutatividad, distributividad,...) y todas estas propiedades están presentes en el cuerpo de los números complejos.

Por ejemplo, no necesitaremos memorizar la regla de multiplicación de números complejos, bastará aplicar las propiedades mencionadas:

$$\begin{aligned}(2+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i}) &= 2-4\mathrm{i}+\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2 \quad \text{(distributividad)}\\ &= 2-4\mathrm{i}+\mathrm{i}+2 \quad \text{(definición de i)}\\ &= 4-3\mathrm{i}\end{aligned}$$

Para dividir números complejos será suficiente aprender un simple *truco*.

$$\frac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} = \frac{(2+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})} = \frac{5\mathrm{i}}{5} = \mathrm{i}$$

El número $a-b\mathrm{i}$ se denomina *conjugado* de $a+b\mathrm{i}$; en el desarrollo anterior hemos multiplicado numerador y denominador por el conjugado del denominador. Al operar el nuevo denominador obtenemos un número real, por lo que el resultado es un número en forma binómica. ——

Teorema 1.2.3 (Teorema fundamental del Álgebra) *Toda ecuación polinómica con coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene solución.*

En la lección anterior estudiamos la relación entre las soluciones de una ecuación polinómica y la factorización del correspondiente polinomio. Tal y como anunciamos allí, dicha relación se mantiene si consideremos polinomios en $\mathbb{C}$, ya que es consecuencia de las propiedades de cuerpo. El teorema fundamental del algebra tiene por lo tanto consecuencias respecto de la factorización en $\mathbb{C}$ de un polinomio: todos los polinomios son factorizables en $\mathbb{C}$ como

$$P(z) = (z-z_0)^{m_0}\dots(z-z_n)^{m_n},$$

en donde cada z_i es solución compleja de la correspondiente ecuación polinómica y m_i es su multiplicidad.

Ejemplo 1.2.2 1. El polinomio x^2+1 es irreducible en $\mathbb{C}$, pero admite la siguiente factorización en $\mathbb{C}$:

$$x^2+1 = (x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i}).$$

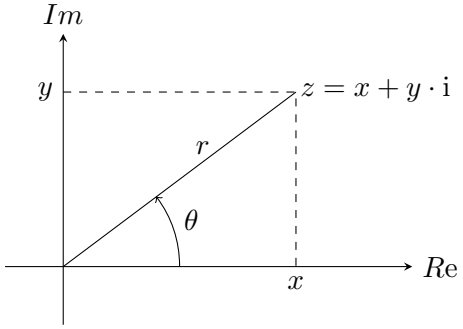


Figura 1.2: Representación gráfica de los números complejos

2. Vamos a obtener las factorizaciones en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ del polinomio $P(x) = x^4+1$. La ecuación bicuadrada $x^4+1 = 0$ no tiene soluciones reales, ya que estas verifican que $x^2 = \pm i$; por lo tanto, la factorización en $\mathbb{R}$ tiene la siguiente forma

$$x^4 + 1 = (x^2 + Ax + B)(x^2 + Cx + D)$$

Expandiendo el miembro derecho e identificando coeficientes, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$A + C = 0, \quad B + D + AC = 0, \quad AD + BC = 0, \quad BD = 1,$$

cuya única solución es $A = \sqrt{2}$, $B = 1$, $C = -\sqrt{2}$, $D = 1$; la factorización en $\mathbb{R}$ es por lo tanto:

$$x^4 + 1 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$$

Para obtener la factorización en $\mathbb{C}$ basta con resolver las ecuaciones $x^2 + x\sqrt{2} + 1 = 0$, $x^2 - x\sqrt{2} + 1 = 0$, cuyas soluciones son

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2};$$

por lo tanto:

$$x^4 + 1 = \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \text{——}$$

En la figura 1.2 aparece la representación gráfica de los números complejos como puntos del plano. Definimos a continuación varias funciones de gran importancia para trabajar en el cuerpo de los números complejos.

Definición 1.2.4
En las definiciones siguientes, consideramos $x, y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$:

- *Conjugado de un número complejo:*

$$\bar{\cdot}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \overline{x + \mathrm{i}y} = x - \mathrm{i}y$$

- *Parte real de un número complejo:*

$$\mathrm{Re}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Re}(x + \mathrm{i}y) = x, \quad \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

- *Parte imaginaria de un número complejo:*

$$\mathrm{Im}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Im}(x + \mathrm{i}y) = y, \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \bar{z})$$

- *Módulo de un número complejo:*

$$|\cdot|\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+, \qquad |x + \mathrm{i}y| = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

- *Argumento de un número complejo:* $\mathrm{Arg}\colon \mathbb{C}^* \to [0, 2\pi)$.
  Si $x = 0$, entonces

$$\mathrm{Arg}(\mathrm{i}y) = \frac{\pi}{2}, \ \textit{si } y > 0, \quad \mathrm{Arg}(\mathrm{i}y) = \frac{3\pi}{2}, \ \textit{si } y < 0$$

  y si $x \neq 0$, entonces $\mathrm{Arg}(x + \mathrm{i}y) = \theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$ *de forma que:*

$$\theta \in [0, \pi] \ \textit{si } y \geq 0$$
$$\theta \in [\pi, 2\pi) \ \textit{si } y < 0$$

Las funciones módulo y argumento también caracterizan a un número complejo de la misma forma que la parte real y la parte imaginaria. Si $r = |x + iy|$ y $\theta = \mathrm{Arg}(x + iy)$, entonces se verifica que:

$$x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta) \tag{1.9}$$

Por su definición, exigimos que el módulo de un número complejo sea positivo y que su argumento sea un ángulo entre 0 y 2π, sin embargo, la igualdad 1.9, permite utilizar cualquier par $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ para representar a un único número complejo, cuyo módulo es $|r|$ y su argumento es $\theta \pm k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. El par (r, θ) es la *forma polar* del número complejo $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

Proposición 1.2.5 *El operador conjugado verifica las siguientes propiedades: si $z, w \in \mathbb{C}$*

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}.$$

La demostración de esta proposición es una simple comprobación que debe ser fácilmente efectuada por el estudiante. La principal consecuencia de esta propiedad es la siguiente.

Proposición 1.2.6 *Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$ es una raíz de P, entonces $\overline{z}$ también es raíz de P.*

En el ejemplo 1.2.2 hemos calculado las raíces del polinomio $P(x) = x^4 + 1$ y podemos comprobar que efectivamente las cuatro raíces son conjugadas dos a dos.

La demostración de la propiedad anterior es bastante simple. Supongamos que

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

y que $z \in \mathbb{C}$ es raíz de P; en el desarrollo siguiente, solo utilizamos la proposición anterior y que el conjugado de un número real es él mismo:

$$\begin{aligned} a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 &= 0 \\ \overline{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0} &= 0 \\ \overline{a_n} \cdot \overline{z}^n + \cdots + \overline{a_1} \cdot \overline{z} + \overline{a_0} &= 0 \\ a_n \overline{z}^n + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, efectivamente $\overline{z}$ también es raíz del polinomio.

Dado que la fórmula del binomio de Newton es consecuencia de las propiedades de la estructura de cuerpo, también es válida para números complejos.

Teorema 1.2.7 (Binomio de Newton) *Si $x, y \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Ejemplo 1.2.3

$$\begin{aligned} (1+\mathrm{i})^4 = \binom{4}{0} + \binom{4}{1}\mathrm{i} + \binom{4}{2}\mathrm{i}^2 + \binom{4}{3}\mathrm{i}^3 + \binom{4}{4}\mathrm{i}^4 = \\ = 1 + 4\mathrm{i} - 6 - 4\mathrm{i} + 4 = -2 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.4 Vamos a resolver la ecuación

$$z\overline{z} + 3(z - \overline{z}) = 13 + 12\mathrm{i}$$

En este ecuación aparece la función conjugado y por eso necesitamos un tratamiento específico para números complejos. Una alternativa es sustituir z por $x + \mathrm{i}y$ y convertir la ecuación en un sistema de ecuaciones cuyas soluciones son la parte real y la parte imaginaria de la ecuación inicial. Pero en este ejemplo vamos a utilizar otro método más sencillo.

Cada número complejo está determinado por su parte real y su parte imaginaria, y estos a su vez se pueden calcular a partir del propio número y de su

conjugado (definición 1.2.4); lo que vamos a hacer es transformar la ecuación anterior en un sistema cuyas soluciones son la solución de la ecuación y su conjugado. La primera ecuación del sistema es la propia ecuación y la segunda se obtiene aplicando el operador conjugado a ambos lados de la ecuación. Si sustituimos $\bar{z}$ por w, el sistema a resolver es:

$$zw + 3(z - w) = 13 + 12\mathrm{i}$$
$$wz + 3(w - z) = 13 - 12\mathrm{i}$$

En primer lugar, observamos que la forma de obtener el sistema equivalente es más sencilla que la planteada anteriormente y basada en la forma binómica de la incognita. Además, a partir de aquí podemos usar los métodos estudiados en la lección anterior para sistemas de ecuaciones no lineales, ya que no tenemos operadores específicos para números complejos.

En particular, para este sistema basta con sumar y restar las dos ecuaciones para obtener un sistema equivalente pero cuya resolución es muy sencilla:

$$6z - 6w = 24\mathrm{i} \quad \text{(diferencia)}$$
$$2zw = 26 \quad \text{(suma)}$$

De la primera ecuación deducimos que $z = w + 4\mathrm{i}$, por lo que la segunda ecuación se convierte en

$$w^2 + 4\mathrm{i}w - 13 = 0,$$

cuyas soluciones son $w = \pm 3 - 2\mathrm{i}$. Por lo tanto, las soluciones de la ecuación inicial son $z = \pm 3 + 2\mathrm{i}$. ——

1.2.2. Exponencial compleja

Nuestro objetivo en esta sección es extender la definición de la función exponencial con base e a los números complejos.

Definición 1.2.8 *Definimos la función exponencial en el cuerpo de los números complejos como:* $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, y)$.

Es evidente que esta definición es coherente con la exponencial sobre números reales, ya que si $y = 0$:

$$\cos y + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, y = \cos 0 + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, 0 = 1$$

Además, incluso para números que no sean reales, esta función verifica la siguientes propiedades:

PROPOSICIÓN 1.2.9

1. $\mathrm{e}^z\ \mathrm{e}^w = \mathrm{e}^{z+w}$, *para todo* $z, w \in \mathbb{C}$.

2. $(\mathrm{e}^z)^n = \mathrm{e}^{nz}$, *para todo* $z \in \mathbb{C}$ *y todo* $n \in \mathbb{N}$

Demostración: El segundo apartado es consecuencia del primero, así que solo es necesario probar este. Consideramos $z = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $w = x_2 + \mathrm{i}y_2$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^z\ \mathrm{e}^w &= \mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{x_2}(\cos y_1 + \mathrm{i}\operatorname{sen} y_1)(\cos y_2 + \mathrm{i}\operatorname{sen} y_2) \\
&= \mathrm{e}^{x_1+x_2}(\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2 \\
&\qquad + \mathrm{i}(\operatorname{sen} y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \operatorname{sen} y_2)) \\
&= \mathrm{e}^{x_1+x_2}(\cos(y_1 + y_2) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(y_1 + y_2)) \\
&= \mathrm{e}^{x_1+x_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(y_1+y_2)} = \mathrm{e}^{z+w}
\end{aligned}$$

□

Como se puede observar, la demostración se basa en las igualdades que conocemos para el seno y coseno de la suma de ángulos.

A partir de función exponencial sobre números complejos podemos introducir una representación alternativa de estos números, la *forma exponencial*. Para cada $\theta \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta,$$

y por lo tanto, si z es un número complejo con módulo r y argumento θ, entonces

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta};$$

la expresión $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ es la *forma exponencial* de z.

La igualdad $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta$ se conoce como *igualdad de Euler* y aplicada a $\theta = \pi$ nos conduce a la siguiente igualdad que relaciona las constantes matemáticas más importantes:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$$

Aunque la forma exponencial es equivalente a la forma polar (se determina a partir de los mismos elementos, el módulo y el argumento), es preferible trabajar con la primera, ya que la propiedades de la exponencial facilitan su manipulación. También debemos recordar que el argumento de un número complejo es un número real entre 0 y 2π, aunque naturalmente es posible que el exponente de la función exponencial esté fuera de este rango.

PROPOSICIÓN 1.2.10 *Si r es el módulo de $z \in \mathbb{C}$ y θ es su argumento, entonces*

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)} \quad \textit{para todo} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Notación. Es conveniente hacer aquí un inciso para hacer unas observaciones sobre notación matemática. Habitualmene, en matemáticas se usan letras cursivas para representar variables e incognitas (x, y,...) y letras redondas para representar constantes (e, i). Este mismo criterio se sigue para las funciones: $f(x)$ representa una función arbitraria y $\cos(x)$ es la función coseno.

Por otra parte, la funciones deben escribirse "siempre" delimitando su argumento (o argumentos) entre paréntesis. De esta forma, la expresión $\cos 2\theta$ no sería correcta y deberíamos escribir $\cos(2\theta)$, e incluso $\cos(\theta)$ en lugar de $\cos\theta$. No obstante, es muy habitual prescindir de los paréntesis siempre que esto no provoque ninguna confusión para trabajar con expresiones más simples; debemos ser muy cuidadosos al usar estas simplificaciones y usarlas lo menos posible.

Fórmula de Moivre. Por la proposición 1.2.5

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},$$

y por lo tanto

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,n\theta.$$

Esta igualdad se denomina *Fórmula de Moivre* y su principal aplicación es obtener igualdades que involucran a las funciones del tipo $\cos nx$ y $\mathrm{sen}\,nx$.

Ejemplo 1.2.5 Si expandimos la igualdad de Moivre para $n = 2$ obtenemos:

$$\cos 2\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,2\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 = \cos^2\theta + 2\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta - \mathrm{sen}^2\theta$$

Fijándonos en la parte real y en la parte imaginaria, deducimos:

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta$$
$$\mathrm{sen}\,2\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$$

——

Ejemplo 1.2.6 Vamos a expresar $\cos 5\theta$ como polinomio en $\cos\theta$.

$$\begin{aligned}
\cos 5\theta &= \mathrm{Re}((\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)^5) \\
&= \cos^5\theta + \binom{5}{2}(\cos^3\theta)\mathrm{i}^2(\mathrm{sen}^2\theta) + \binom{5}{4}(\cos\theta)\mathrm{i}^4(\mathrm{sen}^4\theta) \\
&= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\,\mathrm{sen}^2\theta + 5\cos\theta\,\mathrm{sen}^4\theta \\
&= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta(1-\cos^2\theta)^2 \\
&= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 10\cos^5\theta + 5\cos\theta(1 - 2\cos^2\theta + \cos^4\theta) \\
&= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta
\end{aligned}$$

Para optimizar los cálculos, hemos calculado solamente la parte real; de esta forma, en la segunda igualdad solo necesitamos escribir los sumandos correspondientes a las potencias pares de i, que son los que corresponden con números reales. ——

Raíces complejas. La forma exponencial también facilita el cálculo de algunas operaciones, como por ejemplo las raíces.

Ejemplo 1.2.7 Vamos a calcular los números complejos w, tales que $w^4 = -1$; es decir, queremos calcular la *raíz cuarta* de -1. En primer lugar, podemos observar que tales números existen, ya que son las raíces del polinomio $P(z) = z^4+1$. Por lo general, abordar este problema usando la forma binómica será muy complicado, sin embargo, la forma exponencial facilita el trabajo.

$$w^4 = r^4 \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta} = -1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+2k\pi)}$$

Por lo tanto, $r = 1$ y $4\mathrm{i}\theta = \mathrm{i}(\pi + 2k\pi)$. De la segunda igualdad, deducimos que solo cuatro valores de θ son argumentos de números complejos, los correspondientes a $k = 0, 1, 2, 3$:

$$\theta_0 = \frac{\pi}{4}, \quad \theta_1 = \frac{3\pi}{4}, \quad \theta_2 = \frac{5\pi}{4}, \quad \theta_3 = \frac{7\pi}{4}$$

Por lo tanto, -1 tiene cuatro raíces cuartas:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} \\
w_1 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} = \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} \\
w_2 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = \mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} \\
w_3 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_3} = \mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

En el ejemplo 1.2.2, resolvimos el mismo problema a partir de la ecuación polinómica. Debemos acostumbrarnos a que un mismo problema puede resolverse de varias formas y a saber elegir la más adecuada según los datos concretos. ——

Teorema 1.2.11 *Para cada número complejo $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ existen n numeros complejos distintos $w_0, \ldots, w_{n-1}$ que verifican $w_k^n = z$. Estos números complejos son:*

$$w_k = \sqrt[n]{r}\exp \mathrm{i}\Big(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\Big), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

En el enunciado anterior hemos utilizado una notación alternativa para la función exponencial,

$$\exp(x) = \mathrm{e}^x$$

que será de gran ayuda cuando queramos escribir expresiones grandes en el exponente.

Logaritmo neperiano. La función logaritmo neperiano, o simplemente logaritmo, es la función inversa a la exponencial. Es decir, si $z = \mathrm{e}^w$, decimos que z es el logaritmo neperiano de w.

EJEMPLO 1.2.8 Vamos a hallar los números w tales que $\mathrm{e}^w = 1 + \mathrm{i}$; nuevamente, la forma exponencial es el camino más adecuado:

$$\mathrm{e}^w = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = \mathrm{e}^{\log\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = \exp(\log\sqrt{2} + \mathrm{i}(\frac{\pi}{4} + 2k\pi))$$

Por lo tanto, hay infinitos números complejos que son logaritmo neperiano de $1 + \mathrm{i}$:

$$w_k = \log\sqrt{2} + \mathrm{i}(\frac{\pi}{4} + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$ ——

En adelante, denotaremos a la función *logaritmo neperiano* con "log", aunque también podemos usar "ln", "Ln" o "L".

TEOREMA 1.2.12 *Dado un número complejo $z \neq 0$, existen infinitos números complejos distintos w_k, $k \in \mathbb{Z}$, que verifican $z = \mathrm{e}^{w_k}$. Estos números complejos tienen la siguiente forma:*

$$w_k = \log r + \mathrm{i}(\theta + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

donde $r = |z|$ y $\theta = \mathrm{Arg}(z)$.

DEFINICIÓN 1.2.13 *Llamamos* valor principal del logaritmo *de $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$, y lo denotamos* $\log z$ *al número:*

$$\log z = \log r + \mathrm{i}\theta$$

Dado que el logaritmo de un número complejo no es único, debemos tener cuidado con las operaciones que involucren un logaritmo. Por ejemplo, la igualdad $\log z^n = n \log z$ no es cierta en general, ya que podemos tomar distintas "ramas" del logaritmo en cada uno de los miembros. Ni siquiera esta igualdad es correcta si trabajamos solamente con el valor principal del logaritmo:

$$\log(-1)^2 = \log 1 = 0, \qquad 2\log(-1) = 2\pi\mathrm{i}$$

1.2.3. Funciones hiperbólicas

Las *funciones hiperbólicas* se definen a partir de la exponencial.

DEFINICIÓN 1.2.14 *Sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ se definen las funciones* seno hiperbólico *y* coseno hiperbólico *como sigue:*

$$\mathrm{senh}\, z = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2} \qquad \cosh z = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}$$

El siguiente teorema nos muestra como calcular la parte real e imaginaria de los valores de estas funciones, sin embargo, en la mayoría de los casos es preferible trabajar con su definición o haciendo uso de las propiedades que veremos más adelante.

TEOREMA 1.2.15

1. $\operatorname{senh}(x+y\mathrm{i}) = \operatorname{senh} x \cos y + \mathrm{i} \cosh x \operatorname{sen} y$
2. $\cosh(x+y\mathrm{i}) = \cosh x \cos y + \mathrm{i} \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\operatorname{senh}(x+\mathrm{i}y) &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} - \mathrm{e}^{-x-\mathrm{i}y}) \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}(\cos y + \mathrm{i}\operatorname{sen} y) - \mathrm{e}^{-x}(\cos y - \mathrm{i}\operatorname{sen} y)) \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x})\cos y + \mathrm{i}\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})\operatorname{sen} y \\
&= \operatorname{senh} x \cos y + \mathrm{i} \cosh x \operatorname{sen} y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cosh(x+\mathrm{i}y) &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} + \mathrm{e}^{-x-\mathrm{i}y}) \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}(\cos y + \mathrm{i}\operatorname{sen} y) + \mathrm{e}^{-x}(\cos y - \mathrm{i}\operatorname{sen} y)) \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})\cos y + \mathrm{i}\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x})\operatorname{sen} y \\
&= \cosh x \cos y + \mathrm{i} \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y
\end{aligned}$$

□

El siguiente corolario recoge algunos casos particulares bastante útiles.

COROLARIO 1.2.16

$$\cosh \mathrm{i}x = \cos x, \quad \operatorname{senh} \mathrm{i}x = \mathrm{i}\operatorname{sen} x, \quad \operatorname{tgh} \mathrm{i}x = \mathrm{i}\operatorname{tg} x$$

$$\cos \mathrm{i}x = \cosh x, \quad \operatorname{sen} \mathrm{i}x = \mathrm{i}\operatorname{senh} x, \quad \operatorname{tg} \mathrm{i}x = \mathrm{i}\operatorname{tgh} x$$

Las propiedades que recogemos en el siguiente resultado nos ayudan a trabajar con estas funciones sin necesidad de sustituirlas por su definición, aunque, naturalmente todas ellas se demuestran fácilmente a partir de ella.

Por otra parte, se puede observar que estas propiedades son similares a las propiedades que el alumno conocerá de las funciones trigonométricas. Se debe tener mucho cuidado con esto, ya que en algunos casos solo difieren en algún signo, lo que puede llevar a errores.

PROPOSICIÓN 1.2.17 *Las funciones hiperbólicas verifican las siguientes igualdades:*

1. $\operatorname{senh}(z+u) = \operatorname{senh} z \cosh u + \cosh z \operatorname{senh} u$

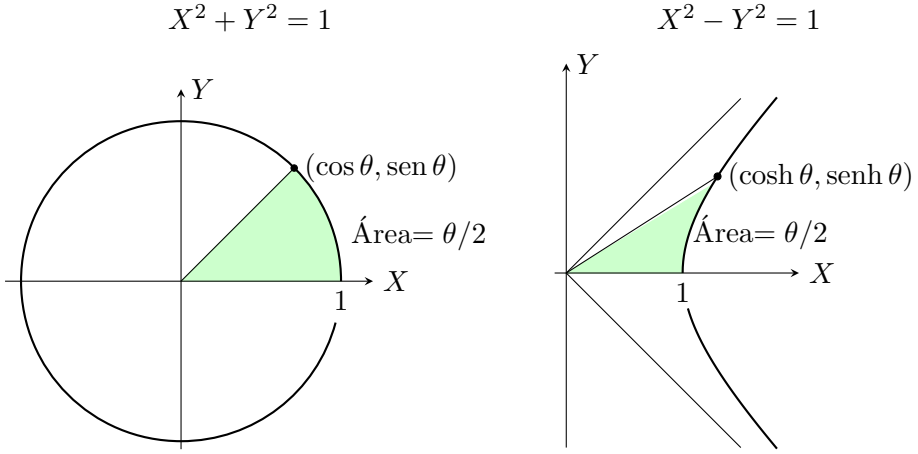


Figura 1.3: Representación de las funciones circulares e hiperbólicas.

2. $\cosh(z+u) = \cosh z \cosh u + \operatorname{senh} z \operatorname{senh} u$

3. $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$

4. $\operatorname{senh} 2z = 2 \operatorname{senh} z \cosh z$

5. $\cosh 2z = \cosh^2 z + \operatorname{senh}^2 z$

6. $2\cosh^2 z = 1 + \cosh 2z$

7. $2\operatorname{senh}^2 z = \cosh 2z - 1$

8. $\operatorname{senh} z \cosh u = \frac{1}{2}(\operatorname{senh}(z+u) + \operatorname{senh}(z-u))$

9. $\operatorname{senh} z \operatorname{senh} u = \frac{1}{2}(\cosh(z+u) - \cosh(z-u))$

10. $\cosh z \cosh u = \frac{1}{2}(\cosh(z+u) + \cosh(z-u))$

La justificación de los nombres de estas funciones aparece en la figura 1.3. En el tema siguiente estudiaremos con más detalle la curva que aparece dibujada a la derecha de esta figura y que se conoce como hipérbola. Si las coordenadas de un punto de la circunferencia de radio 1 son las funciones trigonométricas aplicadas a la medida del arco, las coordenadas de la hipérbola son las funciones hiperbólicas.

1.2.4. Funciones trigonométricas

A partir de las expresiones para $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ y $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$ deducimos expresiones para el seno y el coseno de un número real x:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,x \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \cos x - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,x \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} \cos x = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \\ \mathrm{sen}\,x = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} \end{array}$$

Por lo tanto, para definir las funciones trigonométricas sobre número complejos generalizando las definiciones sobre números reales, necesariamente tenemos que partir de estas igualdades.

Definición 1.2.18 *Sobre el cuerpo* $\mathbb{C}$ *se definen las funciones* sen, cos *y* tg *como sigue:*

$$\mathrm{sen}\,z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \quad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} \quad \mathrm{tg}\,z = \frac{\mathrm{sen}\,z}{\cos z}$$

Igual que la fórmula de Moivre se utiliza para deducir expresiones para el seno o coseno de ángulos múltiples, la definición de las funciones trigonométricas usando la exponencial compleja permite deducir expresiones para las potencias del seno o el coseno. Vemos a continuación un ejemplo:

$$\begin{aligned} \mathrm{sen}^3\,\theta &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\right)^3 \\ &= -\frac{1}{8\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta} - 3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta}\right) \\ &= -\frac{1}{8\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta} - 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta}\right) \\ &= -\frac{1}{8\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta} - 3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})\right) \\ &= -\frac{1}{8\mathrm{i}}\left(2\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,3\theta - 3\cdot 2\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta\right) \\ &= \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,3\theta \end{aligned}$$

El siguiente teorema da la expresión de estas funciones en términos de su parte real y parte imaginaria.

Teorema 1.2.19

1. $\mathrm{sen}(x + y\mathrm{i}) = \mathrm{sen}\,x\cosh y + \mathrm{i}\cos x\,\mathrm{senh}\,y$
2. $\cos(x + y\mathrm{i}) = \cos x\cosh y - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{senh}\,y$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x+\mathrm{i}y) &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)}) \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x+y}) \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{-y}(\cos x + \mathrm{i}\operatorname{sen} x) - \mathrm{e}^{y}(\cos x - \mathrm{i}\operatorname{sen} x)) \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{y})\cos x + \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{y})\mathrm{i}\operatorname{sen} x \\
&= -\mathrm{i}\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{y})\cos x + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{y})\operatorname{sen} x \\
&= \operatorname{sen} x \cosh y + \mathrm{i}\cos x \operatorname{senh} y \\
\cos(x+\mathrm{i}y) &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)}) \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x+y}) \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-y}(\cos x + \mathrm{i}\operatorname{sen} x) + \mathrm{e}^{y}(\cos x - \mathrm{i}\operatorname{sen} x)) \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{y})\cos x + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{y})\mathrm{i}\operatorname{sen} x \\
&= \cos x \cosh y - \mathrm{i}\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y
\end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 1.2.20 *Las funciones seno y coseno verifican las siguientes igualdades:*

1. $\operatorname{sen} -z = -\operatorname{sen} z$; $\cos -z = \cos z$
2. $\operatorname{sen}(z+u) = \operatorname{sen} z \cos u + \cos z \operatorname{sen} u$
3. $\cos(z+u) = \cos z \cos u - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} u$
4. $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$
5. $\operatorname{sen}(z+2n\pi) = \operatorname{sen} z$; $\cos(z+2n\pi) = \cos z$
6. $\operatorname{sen}(z+\frac{\pi}{2}) = \cos z$; $\cos(z+\frac{\pi}{2}) = -\operatorname{sen} z$
7. $\operatorname{sen}(z+\pi) = -\operatorname{sen} z$; $\cos(z+\pi) = -\cos z$;
   $\operatorname{sen}(\pi - z) = \operatorname{sen} z$; $\cos(\pi - z) = -\cos z$
8. $\operatorname{sen} 2z = 2\operatorname{sen} z \cos z$
9. $\cos 2z = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z$
10. $2\cos^2 z = 1 + \cos 2z$
11. $2\operatorname{sen}^2 z = 1 - \cos 2z$

12. $\operatorname{sen} z \cos u = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(z+u) + \operatorname{sen}(z-u))$

13. $\operatorname{sen} z \operatorname{sen} u = \frac{1}{2}(-\cos(z+u) + \cos(z-u))$

14. $\cos z \cos u = \frac{1}{2}(\cos(z+u) + \cos(z-u))$

15. $\operatorname{sen} z + \operatorname{sen} u = 2 \operatorname{sen} \frac{z+u}{2} \cos \frac{z-u}{2}$

16. $\operatorname{sen} z - \operatorname{sen} u = 2 \cos \frac{z+u}{2} \operatorname{sen} \frac{z-u}{2}$

17. $\cos z + \cos u = 2 \cos \frac{z+u}{2} \cos \frac{z-u}{2}$

18. $\cos z - \cos u = -2 \operatorname{sen} \frac{z+u}{2} \operatorname{sen} \frac{z-u}{2}$

Se puede ver que todas estas propiedades coinciden con las que ya conocemos para números reales (y no puede ser de otra manera). Sin embargo, trabajando con números complejos tenemos una herramienta muy sencilla para poder deducirlas.

Ejercicios básicos

1. Determine el menor conjunto numérico al que pertenecen los siguientes números:

$$0.5, \quad 4, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{6}{3}, \quad \pi, \quad \sqrt{3}, \quad \mathrm{i}^2, \quad \sqrt{4}, \quad 2+3i, \quad 0.\widehat{3}$$

2. Simplifique las siguientes operaciones:

$$(5+3\mathrm{i})(2-\mathrm{i})-(3+\mathrm{i}), \qquad (1-2\mathrm{i})^3, \qquad \frac{1}{\mathrm{i}}, \qquad \mathrm{i}^{-17}, \qquad \frac{5-8\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}$$

3. Resuelva la siguiente ecuación SIN expresar la incógnita en su forma binómica.

$$\frac{2z}{1+\mathrm{i}}-\frac{2z}{\mathrm{i}}=\frac{5}{2+\mathrm{i}}$$

4. Resuelva el siguiente sistema SIN expresar las incógnitas en su forma binómica. $\begin{cases} 4z+3w=23 \\ z+\mathrm{i}w=6+8\mathrm{i} \end{cases}$

5. Resuelva la siguiente ecuación SIN expresar la incógnita en su forma binómica.

$$z^2+2\overline{z}-1=0$$

6. Exprese en forma polar los siguientes números

$$1, \quad -1, \quad \mathrm{i}, \quad -\mathrm{i}, \quad 1-\mathrm{i}, \quad 1+\mathrm{i}, \quad \mathrm{i}-1, \quad -1-\mathrm{i}.$$

7. Dados $z_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ y $z_2=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$:

   a) Calcule el argumento de $z_1z_2^2$ y de z_1^3/z_2.

   b) Calcule la parte real y la parte imaginaria de $z_1^2+\mathrm{i}z_2$.

8. Calcule las siguientes exponenciales complejas

$$\mathrm{e}^{1-\pi\mathrm{i}}, \qquad \mathrm{e}^{2+3\pi\mathrm{i}/4}, \qquad \exp(2+\tfrac{7\pi}{6}\mathrm{i}).$$

9. Utilice la fórmula de Moivre para probar:

$$\operatorname{sen}5\theta=16\operatorname{sen}^5\theta-20\operatorname{sen}^3\theta+5\operatorname{sen}\theta$$

10. Encuentre las tres raíces cúbicas de $(8+8\mathrm{i})$.

11. Encuentre todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$z^2+2z+2=0, \qquad z^3+8=0, \qquad z^4+5z^2+4$$

y factorice en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ los polinomios que aparecen en las ecuaciones.

12. Calcule el logaritmo de -1.

13. Pruebe que $\log\Big(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{1}{2}\sqrt{3}\Big)=-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}$.

14. Aplique la definición para expresar en forma binómica los siguientes números: $\cosh(\frac{\pi}{4}\mathrm{i})$ y $\mathrm{sen}(\frac{5}{6}\pi+\mathrm{i})$.

15. Exprese $\mathrm{sen}^4\,\theta$ y $\cos^6\theta$ en función des seno y coseno de múltiplos de θ.

16. Resuelva las siguientes ecuaciones SIN expresar la incógnita es forma binómica pero expresando las soluciones de esa forma:

$$\cos z=\frac{3}{4}\mathrm{i},\qquad \mathrm{senh}\,z=-2$$

17. Deduzca las siguientes igualdades haciendo uso de la definición de las funciones hiperbólicas y trigonométricas.

$$\cosh^2 z-\mathrm{senh}^2\,z=1,\qquad 2\cos^2 z=1+\cos 2z$$

18. Para las funciones hipérbolicas definidas en $\mathbb{R}$ demuestre que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{senh}\,x=\cosh x,\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh x=\mathrm{senh}\,x,\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{tgh}\,x=1-\mathrm{tgh}^2\,x$$

Relación de ejercicios (I)

1. Calcule el valor numérico de las siguientes expresiones:

$$5!, \qquad \frac{100!}{98!}, \qquad \frac{10!\cdot 5!}{6!\cdot 8!}, \qquad \frac{(n+1)!}{(n-1)!},$$
$$\binom{7}{4}, \qquad \binom{100}{99}, \qquad \binom{3n+2}{3n}, \qquad \binom{1/2}{5}$$

2. Use la fórmula del Binomio de Newton para desarrollar en forma polinómica las siguientes expresiones:

   a) $(a+b)^7$

   b) $(x-1)^4$

   c) $\left(2x^3 - \frac{2}{5x^2}\right)^2$

3. Calcule el valor de a, b, c y d para que se verifique:

   a) $(2-3y)^3 = 8 - 9y^3 + 2a^b y^2 - 2aby$

   b) $(x-c)^2 + d^2 = x^2 + x + 1$

4. Simplifique la operación $q(x) - p(x)r(x)$, en donde:

$$p(x) = 2x+3, \qquad q(x) = x^3 - 2x + 1, \qquad r(x) = x^4 - 1.$$

5. Utilice la técnica de compleción de cuadrados sobre las siguientes expresiones:

   a) $x^2 - 2x$

   b) $4x^2 + 8x - 1$

6. Obtenga una expresión polinómica centrada en $x = 1$ a partir del polinomio $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

7. Aplique la técnica de completar cuadrados al polinomio ax^2+bx+c para deducir la fórmula de la resolución de ecuaciones de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

8. Calcule el cociente y el resto de las siguientes divisiones de polinomios:

   a) $(x^4 - 3x^2 + 7x - 2) : (x+1)$

   b) $(6x^4 - x^3 + 3x + 5) : (2x^2 + x - 2)$

9. Averigüe el valor de m para que el resto obtenido de la división del polinomio $x^4 - 5x^2 + mx - 1$ entre $x + 1$ sea -2.

10. Factorice el polinomio $p(x) = 3x^3 - x^2 - 7x + 5$.

11. Halle razonadamente una ecuación de segundo grado, con coeficientes enteros, que tenga por soluciones los números:

    a) 2 y -3 (Sol: $x^2 + x - 6 = 0$)

    b) $\frac{1}{5}$ y 3 (Sol: $5x^2 - 16x + 3 = 0$)

12. Halle el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes polinomios:

    a) $x(x+2)^2(x-1)(x+1)^2$, $x^2(3x+3)(x-1)$ y $(3x+2)(4x+4)(x-1)^2x^2$

    b) $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$ y $2x^3 - x^2 - 7x + 6$

13. *a*) ¿Cuál es el polinomio de orden 10 en el punto $x_0 = 3$ de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$?

    b) ¿Es cierto que el polinomio de Taylor de *orden 5* de una función tiene *grado 5*?

    c) Si el polinomio de orden 5 de una función f en el punto $x_0 = -2$ es $P(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$, ¿Cuánto vale la derivada tercera de f en "-2", $f^{(3)}(-2)$? ¿Podemos conocer el valor exacto de $f(0)$?

14. Calcule los polinomios de Taylor de ordenes 1, 2, 3, 4 y 5 en el punto $x_0 = 0$ de la función $\cos x$.

15. Calcule los polinomios de Taylor de ordenes 1, 2, 3, 4 y 5 en el punto $x_0 = 1$ de la función $\sqrt{x}$.

16. Calcule el polinomio de Taylor de orden 12 de la función $f(x) = \text{sen}(x^2)$ en el punto $x = 0$.

17. Descomponga en forma de suma de fracciones simples:

$$\frac{2x-3}{x^2-9} \qquad \frac{8}{x^2+6x+5} \qquad \frac{x-1}{x^3+x^2-6x}$$

18. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x = 0 \\ 2y - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z - x^2 = 1 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases}$$

19. Simplifique las siguientes operaciones y exprese el resultado en forma binómica:

$$\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} \quad , \quad \frac{1}{5-3\mathrm{i}} - \frac{1}{5+3\mathrm{i}} \quad , \quad \frac{1}{2}(1+\mathrm{i})^2 \quad , \quad \mathrm{i}^{2007} \quad , \quad (1-\mathrm{i})^8$$

20. Resuelva la siguiente ecuación SIN escribir la incógnita en su forma binómica.
$$z + \bar{z}\mathrm{i} - 5 = \frac{3 - z\bar{z}}{2\mathrm{i}}$$

21. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} z - w + u = 3 - \mathrm{i} \\ z + \mathrm{i}w = 6 + 8\mathrm{i} \\ w + 2\mathrm{i}u = -\mathrm{i} \end{cases}$

22. Sin operar la expresión, calcule el módulo de: $z = \dfrac{(1+2\mathrm{i})^3(4-3\mathrm{i})^4}{(3+4\mathrm{i})^4(2-\mathrm{i})^3}$

23. Exprese $\operatorname{sen} 3\theta$, $\cos 6\theta$, $\operatorname{sen} 4\theta$ y $\cos 5\theta$ como polinomios en $\operatorname{sen}\theta$ o en $\cos\theta$.

24. Encuentre y representa gráficamente todas las raíces cuartas de $\left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)$

25. Encuentre y represente gráficamente las raíces quintas del número complejo -1.

26. Encuentre todas las soluciones (reales y complejas) de las siguientes ecuaciones:
$$x^2 + x + 1 = 0, \qquad y^4 + 91 = 0, \qquad z^4 + 1 = 0,$$
y factorice en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ los polinomios que aparecen en las ecuaciones.

27. Calcule los logaritmos neperianos de los siguientes números complejos, indicando cual es el logaritmo principal
$$2, \qquad -5, \qquad \mathrm{i}, \qquad \mathrm{i} - 1, \qquad 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}, \qquad \left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2$$

28. Exprese $\cos^4\theta$, $\operatorname{sen}^3\theta$, $\cos^5\theta$ y $\operatorname{sen}^6\theta$ en términos de senos y cosenos de múltiplos de θ.

29. Deduzca las siguientes igualdades haciendo uso de la definición de las funciones hiperbólicas en el cuerpo de los números complejos.

    a) $\operatorname{senh} z \cosh u + \cosh z \operatorname{senh} u = \operatorname{senh}(z+u)$

    b) $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$

    c) $\cosh^2 z + \operatorname{senh}^2 z = \cosh 2z$

    d) $\operatorname{senh} z \cosh u = \frac{1}{2}(\operatorname{senh}(z+u) + \operatorname{senh}(z-u))$

Relación de ejercicios (II)

1. Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado y comprobar el resultado:

   a) $2(3x-1)+3(x-2)=4-6\left(x+\dfrac{7}{6}\right)$ (Sol: $x=1/3$)

   b) $\dfrac{3-2x}{4}-\dfrac{5-3x}{10}=3-\dfrac{x}{5}$ (Sol: Sin solución)

   c) $\dfrac{x}{2}-3=\dfrac{2x-12}{4}$ (Sol: Infinitas soluciones)

2. Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado:

   a) $x^2-64=0$ (Sol: $x=\pm 8$)

   b) $3x^2-243x=0$ (Sol: $x=0\,,\,81$)

   c) $2y^2+12y=-18$ (Sol: $y=-3$)

   d) $2z^2+7=z$ (Sol: Sin solución)

   e) $\dfrac{4}{t-1}-\frac{6}{t+1}=2$ (Sol: $t=2\,,\,-3$)

3. Resuelva las siguientes ecuaciones bicuadradas:

   $y^4+3y^2+2=0$ $\qquad$ $z^4-3z^2-4=0$ $\qquad$ $t^6-7t^3-8=0$

   (Sol: Sin solución, $z=\pm 2$, $t=-1\,,\,2$)

4. Resuelva las siguientes ecuaciones:

   a) $3x^3-x^2-7x+5=0$ (Sol: $x=1,\,-5/3$)

   b) $x^4-4x^3+7x^2-12x+12=0$ (Sol: $x=2$)

5. Resuelva las siguientes ecuaciones:

   a) $x\cdot\left(3-\frac{x-5}{4}\right)-2=\frac{x^2-2}{3}-\frac{x+8}{6}$ (Sol: $=0\,,\,\frac{53}{7}$)

   b) $(z^2-5)\cdot(6z^2-5z+1)=0$ (Sol: $z=\pm\sqrt{5}\,,\,\frac{1}{3}\,,\,\frac{1}{2}$)

   c) $(x+2)(x+3)=2$ (Sol: $x=-1\,,\,-4$)

6. Resuelva las siguientes ecuaciones irracionales:

   a) $\sqrt{t+1}=2$ (Sol: $t=3$)

   b) $\sqrt{2v-1}+\sqrt{v-1}=5$ (Sol: $v=5$)

   c) $\sqrt{2w+8}+\sqrt{w}=2$ (Sol: Sin solución)

7. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones por los métodos de igualación, sustitución y reducción e interpretar geométricamente los resultados:

$$a)\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ x-2y=5 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ 4x+6y=-9 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} x+y=4 \\ 3x+3y=12 \end{cases}$$

(Sol: $a)$ $(x,y)=(1,-2)$ es la intersección de dos rectas que se cortan. $b)$ Sin solución pues las rectas son paralelas. $c)$ Infinitas soluciones pues las dos rectas son coincidentes)

8. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a)\begin{cases} x-2y+3z=7 \\ 2x-3y+5z=1 \\ 3x-y-2z=4 \end{cases} \quad b)\begin{cases} x-2y+3z=7 \\ 2x-3y+5z=1 \\ 3x-y+4z=4 \end{cases} \quad c)\begin{cases} x-2y+3z=7 \\ x-2y+3z=7 \\ 7x-8y+z=2 \end{cases}$$

(Sol: $a)$ $(x,y,z)=(-11,-21,-8)$. $b)$ Sin solución. $c)$ Infinitas soluciones)

9. Use la fórmula del Binomio de Newton para desarrollar en forma polinómica las siguientes expresiones:

   $a)$ $(x-2)^5$
   $b)$ $(1-2x)^3$
   $c)$ $(z+1/2)^3$
   $d)$ $(6x-7x)^4$

10. Identifique el binomio de Newton equivalente a los siguientes polinomios:

    $a)$ x^2-4x+4
    $b)$ $4x^2-4x+1$
    $c)$ x^3-3x^2+3x-1
    $d)$ $8x^3+12x^2+6x+1$

11. Utilice la técnica de compleción de cuadrados sobre las siguientes expresiones:

    $a)$ x^2+4x+7 (Sol: $(x+2)^2+3$)
    $b)$ x^2-9x+2 (Sol: $\left(x-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{73}{4}$)

12. Calcule el cociente y el resto de las siguiente división de polinomios:

$$(-6x^3+4x^2+x-7):(3x+2)$$

13. Factorice el polinomio $r(x) = 2x^3 - 14x + 12$

14. Simplifique las siguientes fracciones algebraicas:

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3} \qquad \frac{(x+3)^2\cdot(x^2-1)}{(x^2-9)\cdot(x^2+2x+1)} \qquad \frac{x^3-19x-30}{x^3-3x^2-10x}$$

15. Opere y simplifique:

$$\frac{3}{x-2}-\frac{5}{x^2-4} \qquad \frac{x}{x^2+5x+6}-\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3}$$
$$\frac{x+2}{x^2-x-6}-\frac{x+3}{x^2-4x+3} \qquad \frac{1}{(x+5)^2}+\frac{1}{x^2-10x+25}-\frac{1}{x^2-25}$$

16. Exprese los siguientes polinomios en términos de los monomios indicados:

    a) $2x^5 - 3x^2 + x - 4$ en potencias de $(x-1)$.

    b) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ en potencias de $(x+2)$.

17. Halle los polinomios de Taylor de las siguientes funciones en los puntos indicados y de los órdenes indicados:

    a) $f(x) = \operatorname{sen} x$, orden $2n$ en $\pi/2$ *b*) $f(x) = \sqrt{x}$, orden 4 en 4

    c) $f(x) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x$, orden 8 en 0 *d*) $f(x) = \operatorname{tg} x$, orden 5 en 0

18. Calcule el polinomio de Taylor de orden 3 de la función $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen} x$ en el punto $x = 0$.

19. Descomponga en forma de suma de fracciones simples:

$$\frac{x+1}{x^3+6x^2+9x} \qquad \frac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x+2)^2} \qquad \frac{4-x}{2x^2-x-3}$$
$$\frac{2x-1}{x^2+3x+10} \qquad \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} \qquad \frac{x^2}{1-x^4}$$

20. Exprese en forma binómina las soluciones de la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{z} = \frac{2}{2+3\mathrm{i}} + \frac{1}{3+2\mathrm{i}}$$

21. Exprese en forma polar los siguientes números

$$\sqrt{3}-\mathrm{i}\sqrt{3}, \qquad -\sqrt{3}-\mathrm{i}, \qquad 1+\mathrm{i}\sqrt{3}, \qquad \left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2, \qquad -3+3\mathrm{i}$$

22. Calcule las siguientes exponenciales complejas

$$\mathrm{e}^{15-8\mathrm{i}}, \qquad \exp(1-\frac{5\pi}{3}\mathrm{i}), \qquad \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}\mathrm{e}^{1-\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}} \quad ,$$

23. Utilice la fórmula de Moivre para probar:

$$\cos 8\theta = 128\cos^8\theta - 256\cos^6\theta + 160\cos^4\theta - 32\cos^2\theta + 1.$$

24. Encuentre y represente gráficamente las raíces sextas del número complejo $-\mathrm{i}$.

25. Encuentre todas las soluciones (reales y complejas) de las siguientes ecuaciones:

$$t^6 - 2t^4 + 4t^2, \qquad z^4 + z^2 + 1 = 0$$

y factorice en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ los polinomios que aparecen en las ecuaciones.

26. Descomponga en fracciones simples las siguientes expresiones racionales

$$\frac{1}{x^6 - 2x^4 + 4x^2}, \qquad \frac{x^4 + x^3 - 5x - 1}{x^4 + 5x^2 + 4}$$

27. Pruebe que: $\log(5 + 12\mathrm{i}) = \log 13 + \mathrm{i}1.176...$

28. Exprese en forma binómica los siguientes números:

$$\cos(\frac{3}{4}\mathrm{i}), \qquad \operatorname{senh}((1+\mathrm{i})\pi/3).$$

29. Calcule $z = x + \mathrm{i}y$ en los siguientes casos: $\cosh z = -2$ y $\operatorname{sen} z = 2$.

30. Deduzca las siguientes igualdades haciendo uso de la definición de las funciones trigonométricas en el cuerpo de los números complejos.

    a) $\operatorname{sen} z \cos u + \cos z \operatorname{sen} u = \operatorname{sen}(z+u)$

    b) $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$

    c) $2\operatorname{sen} z \cos z = \operatorname{sen} 2z$

    d) $\cos z \cos u = \frac{1}{2}(\cos(z+u) + \cos(z-u))$

31. Obtenga la expresión binómica de $\operatorname{tgh}(x + \mathrm{i}y)$ y de $\operatorname{tg}(x + \mathrm{i}y)$.

32. Deduzca la siguiente expresión: $\operatorname{tg}(z+u) = \dfrac{\operatorname{tg} z + \operatorname{tg} u}{1 - \operatorname{tg} z \operatorname{tg} u}$.

TEMA 2

Sucesiones y series numéricas

Objetivos: Los objetivos son: (1) estudiar la convergencia de las sucesiones numéricas; (2) saber aplicar los criterios para estudiar la convergencia de series numéricas; (3) saber estudiar la convergencia de series de potencias; (4) saber sumar de forma exacta algunas series numéricas y de potencias; (5) utilizar diversos métodos para saber determinar la suma de una serie con un error determinado.

Prerrequisitos: Manipulación de expresiones y propiedades de las funciones elementales. Concepto de límite de una función y cálculo de límites (regla de L'Hôpital).

Contenido:

- Lección 2.1 Sucesiones numéricas. Definición, características y convergencia. Estudio de la convergencia y cálculo de límites. Infinitésimos equivalentes.
- Lección 2.2 Series numéricas. Definición, propiedades elementales y suma de series. Criterios de convergencia. Series de potencias y series de Taylor, aplicaciones a la suma y aproximación de series numéricas.

LECCIÓN 2.1

Sucesiones numéricas

La palabra *sucesión* designa una colección ordenada de objetos, de modo que uno de ellos se identifica como el primero, otro como el segundo, etc. Por lo tanto, una sucesión numérica es una secuencia de números ordenados.

DEFINICIÓN 2.1.1 *Una* sucesión de números reales *es una aplicación* $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & \dots \end{array}$$

Estas funciones se representan con notación de subíndices en lugar de con paréntesis, es decir, al 0 le hace corresponder a_0 (en lugar de $a(0)$), al 1 le hace corresponder a_1 (en lugar de $a(1)$), y así sucesivamente.

Los números reales $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ son los *términos* de la sucesión; a_n es el *término n-ésimo* de la sucesión, es decir, el término que ocupa la posición n y se denomina *término general* de la sucesión; y la sucesión completa se denota $\{a_n\}$, o simplemente a_n. En algunas ocasiones no será posible o no interesará comenzar la sucesión con a_0, sino en cualquier otro término, de modo que la sucesión será: $\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots\}$ para algún $k > 0$.

EJEMPLO 2.1.1 Veamos algunos ejemplos de sucesiones:

- Los términos de la sucesión $a_n = \dfrac{1}{n}$ con $n \geq 1$ son

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n} \dots$$

- Los términos de la sucesión $b_n = (-1)^n$ son

$$1, -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$$

- Los términos de la sucesión $c_n = \dfrac{2^n - 1}{n^2}$ con $n \geq 1$ son

$$\frac{2^1 - 1}{1^2}, \frac{2^2 - 1}{2^2}, \frac{2^3 - 1}{3^2}, \frac{2^4 - 1}{4^2} \cdots = 1, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{15}{16}, \dots$$

- Los términos de la sucesión $d_n = \dfrac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^n}$ con $n \geq 1$ son

$$\frac{1}{1^1}, \frac{1+2}{2^2}, \frac{1+2+3}{3^3}, \frac{1+2+3+4}{4^4}, \cdots = 1, \frac{3}{4}, \frac{2}{9}, \frac{5}{128}, \dots$$

——

En los ejemplos anteriores, hemos definido la sucesión a partir de la fórmula que proporciona el término general. Sin embargo, existen otras formas de expresar o dar a conocer los términos de una sucesión. Una de ellas es utilizando una propiedad característica. Por ejemplo, la sucesión de números naturales acabados en 7 es $\{7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, \dots\}$, la sucesión de números pares es $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \dots\}$, la sucesión de múltiplos de 3 es $\{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$ o la sucesión de números primos es $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$.

Otra forma de definir una sucesión es mediante una ley de recurrencia o fórmula que permita calcular un término a partir de los términos que le preceden. En este caso será necesario conocer uno o varios términos iniciales. Por ejemplo, la ley de recurrencia:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = n + a_{n-1} \quad \text{si} \quad n > 1 \end{cases}$$

define la sucesión $\{1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \dots\}$; cada término a_n es la suma de los n primeros números naturales y también se puede expresar así:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dependiendo de la ley de recurrencia, a veces es necesario conocer más de un término de la sucesión. Por ejemplo, la ley de recurrencia

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{si} \quad n > 2 \end{cases}$$

que define la sucesión $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$, conocida como sucesión de Fibonacci. Como en el caso anterior, para calcular el término general de la sucesión será necesario resolver la ecuación de recurrencia (contenidos de la asignatura de Matemática Discreta) y, en este caso, obtenemos que:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

DEFINICIÓN 2.1.2 *Sea a_n una sucesión de números reales:*

1. *Decimos que a_n es* creciente *si*

   $$a_n \leq a_{n+1} \quad \textit{para todo} \quad n$$

   y decimos que es estrictamente creciente *si $a_n < a_{n+1}$ para todo n.*

2. *Decimos que a_n es* decreciente *si*

   $$a_n \geq a_{n+1} \quad \textit{para todo} \quad n$$

   y decimos que es estrictamente decreciente *si $a_n > a_{n+1}$ para todo n.*

De forma genérica, decimos que una sucesión es monótona si verifica alguna de las propiedades de la definición anterior. Para estudiar la monotonía de una sucesión, tenemos que probar que se verifica una determinada desigualdad; para ello, podemos utilizar métodos de demostración como inducción o reducción al absurdo o simplemente las propiedades de la relación de orden.

Ejemplo 2.1.2 Vamos a analizar la monotonía de las sucesiones del ejemplo 2.1.1.

1. La sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ es estrictamente decreciente:

$$\begin{aligned} n &< n+1 \\ \frac{n}{n+1} &< 1 \\ \frac{1}{n+1} &< \frac{1}{n} \end{aligned}$$

   La segunda y tercera desigualdades se deducen a partir de las propiedades de la relación de orden entre números reales que hemos recordado en el tema anterior; en concreto, la propiedad de compatibilidad de la relación con el producto.

2. La sucesión $b_n = (-1)^n$ no es monótona: $b_1 = -1 < b_2 = 1$, pero $b_2 = 1 > b_3 = -1$.

3. La sucesión $d_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^n}$ es estrictamente decreciente. En lugar de analizar directamente la desigualdad $d_{n+1} < d_n$ vamos a analizar $\frac{d_{n+1}}{d_n} < 1$, que es equivalente, ya que d_n una sucesión de términos positivos.

$$\begin{aligned} \frac{d_{n+1}}{d_n} &= \frac{(1+2+3+\cdots+n+(n+1))n^n}{(1+2+3+\cdots+n)(n+1)^{n+1}} \\ &= \frac{2(n+1)(n+2)n^n}{2n(n+1)(n+1)^{n+1}} \\ &= \frac{n+2}{n(n+1)}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &< 1 \cdot 1^n = 1 \end{aligned}$$

   La desigualdad del desarrollo anterior se basa en que $\frac{n+2}{n(n+1)} < 1$, lo

cual es cierto para todo $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} n &\geq 2 \\ n^2 &> 2 \\ n + n^2 &> n + 2 \\ n(n+1) &> n + 2 \\ 1 &> \frac{n+2}{n(n+1)} \end{aligned}$$

——

Como puede comprobarse en el último apartado del ejemplo anterior, las demostraciones de monotonía pueden ser bastante complicadas y requerir la aplicación de diversas técnicas. El siguiente resultado aporta una técnica más a este tipo de problemas.

TEOREMA 2.1.3 *Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función creciente en $[0, \infty)$, entonces la sucesión $a_n = f(n)$ es creciente.*

EJEMPLO 2.1.3 Vamos a usar este resultado para estudiar la monotonía de la sucesión $c_n = \dfrac{2^n - 1}{n^2}$ del ejemplo 2.1.1. Por tanto, vamos a considerar la función $f(x) = \dfrac{2^x - 1}{x^2}$ y para estudiar su monotonía, vamos a analizar el signo de su derivada.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2^x - 1}{x^2} \\ f'(x) &= \frac{2^x x^2 \log 2 - 2x(2^x - 1)}{x^4} \\ f'(x) &= \frac{2^x}{x^3}(x \log 2 - 2) + \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

"Ordenar" los factores y términos de $f'(x)$ es la parte complicada del proceso; la derivada es positiva si $x > \dfrac{2}{\log 2}$, ya que en ese caso todos los elementos de la expresión son positivos:

$$\begin{aligned} x > 0 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{2^x}{x^3} > 0 \\ x > 0 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{2}{x^3} \\ x > \frac{2}{\log 2} \quad &\Longrightarrow \quad x \log 2 - 2 > 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es creciente en $[2, \infty)$ y en consecuencia c_n es creciente si $n \geq 2$. ——

DEFINICIÓN 2.1.4 *Sea a_n una sucesión de números reales:*

1. *Decimos que a_n está* acotada superiormente *si el conjunto $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ está acotado superiormente; es decir,*

   si existe un número real M tal que $a_n \leq M$ para todo n.

2. *Decimos que a_n está* acotada inferiormente *si el conjunto $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ está acotado inferiormente; es decir,*

   si existe un número real M tal que $M \leq a_n$ para todo n.

3. *Decimos que a_n está* acotada *si el conjunto $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ está acotado superior e inferiormente; es decir,*

   si existe un número real positivo M tal que $|a_n| \leq M$ para todo n.

EJEMPLO 2.1.4 En el ejemplo 2.1.1, las sucesiones a_n, b_n y d_n están acotadas, y la sucesión c_n está acotada inferior pero no superiormente. ——

2.1.1. Convergencia de una sucesión

La característica más importante que se estudia en una sucesión es su comportamiento *a largo plazo*, es decir, la tendencia de los términos de la sucesión hacia un valor límite. Esta posible propiedad se denomina convergencia.

DEFINICIÓN 2.1.5 *Sea a_n una sucesión.*

1. *Decimos que $\ell \in \mathbb{R}$ es el* límite *de la sucesión a_n si* ***para todo $\varepsilon > 0$, existe un número natural N tal que $|a_n - \ell| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$*** *(véase la figura 2.1). En tal caso escribimos $\lim a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ y decimos que a_n es* convergente *y* converge *a ℓ. Si la sucesión no es convergente, decimos que es* divergente.

2. *Decimos que $+\infty$ es el* límite *de la sucesión a_n si* ***para todo $M \in \mathbb{R}$, existe un número natural N tal que $a_n > M$ para todo $n \geq N$.*** *En tal caso, decimos que a_n diverge a $+\infty$ y escribimos $\lim a_n = +\infty$.*

3. *Decimos que $-\infty$ es el* límite *de la sucesión a_n si* ***para todo $M \in \mathbb{R}$, existe un número natural N tal que $a_n < M$ para todo $n \geq N$.*** *En tal caso, decimos que a_n diverge a $-\infty$ y escribimos $\lim a_n = -\infty$.*

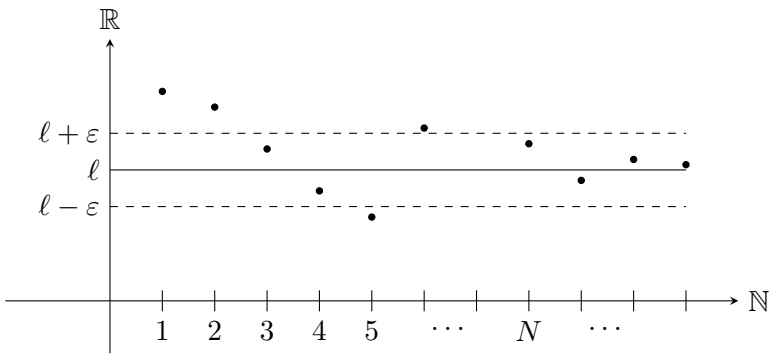


Figura 2.1: Si $\lim a_n = \ell$ entonces para $n \geq N$ los términos de la sucesión distan de ℓ menos de ε unidades.

En adelante utilizaremos la siguiente notación: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; este conjunto se denomina $\mathbb{R}$ *ampliado*.

La definición de límite no da ninguna clave para calcular el límite de una sucesión, solo nos da una propiedad para verificar si un número es o no límite. En estos casos, es necesario deducir propiedades que ayuden a establecer técnicas de cálculo de límite.

Proposición 2.1.6 *Una sucesión convergente tiene un único límite.*

En la mayoría de los casos, las propiedades algebraicas del límite que vemos en los próximos resultados serán suficientes para abordar el cálculo de límites.

Proposición 2.1.7 *Sean a_n y b_n dos sucesiones convergentes a ℓ y m respectivamente; entonces:*

1. $\lim(a_n + b_n) = \ell + m$
2. $\lim a_n b_n = \ell \cdot m$
3. *Si $b_n \neq 0$ para todo n y $m \neq 0$, entonces* $\lim \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{m}$.
4. *Si $b_n > 0$ para todo $n \geq N$ y $m = 0$, entonces* $\lim \dfrac{1}{b_n} = +\infty$
5. *Si $b_n < 0$ para todo $n \geq N$ y $m = 0$, entonces* $\lim \dfrac{1}{b_n} = -\infty$

Esta proposición se generaliza a límites infinitos con la proposición siguiente. En el enunciado de la misma vamos a utilizar varias expresiones donde se utiliza el símbolo ∞; tales expresiones deben considerarse como *abreviaturas*; por ejemplo, $+\infty + \ell = +\infty$ debe leerse como sigue: *el límite de una sucesión que es suma de una sucesión divergente a $+\infty$ y otra convergente a ℓ, es $+\infty$.*

Proposición 2.1.8 *Las siguientes igualdades simbólicas son válidas:*

1. $\pm\infty + \ell = \pm\infty$
2. $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty), \quad (-\infty) + (-\infty) = (-\infty).$
3. $(+\infty)(+\infty) = +\infty, \quad (-\infty)(-\infty) = +\infty, \quad (+\infty)(-\infty) = -\infty.$
4. $1/(\pm\infty) = 0$

Como se puede ver, las siguientes situaciones no están contempladas en la proposición anterior y, por tanto, no pueden resolverse directamente:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right), \qquad \left(\frac{0}{0}\right), \qquad (0 \cdot \infty), \qquad ((+\infty) - (+\infty)).$$

Si, en una primera evaluación, nos encontramos con uno de estos casos, diremos que el límite está *indeterminado (a priori)*. En estos casos necesitaremos realizar transformaciones algebraicas que conviertan la expresión de la sucesión en otra que sí permita calcular el límite. Este tipo de problemas se conoce como *cálculo de límites* y para su resolución, se estudian algunos técnicas y *criterios de convergencia*.

Un tipo de expresiones que no hemos considerado en los resultado anteriores son las de la forma$a_n = {x_n}^{y_n}$; para trabajar con ellas usaremos *siempre* la siguiente igualdad:

$${x_n}^{y_n} = \mathrm{e}^{y_n \log x_n}$$

Teniendo en cuenta que la función exponencial es continua en $\mathbb{R}$, y que $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, y $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, podemos escribir que:

$$\lim {x_n}^{y_n} = \mathrm{e}^{\lim(y_n \log x_n)}$$

Este razonamiento se basa en el teorema 2.1.19 que estudiaremos más adelante. En estas sucesiones, surgen tres nuevos tipos de indeterminaciones,

$$1^\infty, \qquad \infty^0, \qquad 0^0,$$

ya que se reducen a la indeterminación $0 \cdot \infty$ en el exponente de la igualdad anterior.

Ejemplo 2.1.5 La sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ del ejemplo 2.1.1 es convergente y su límite es 0 aplicando la propiedad 4 de la proposición 2.1.8. A partir de ella, podemos deducir el límite de cualquier expresión racional sin más que aplicar las propiedades de la proposición 2.1.7. ——

Ejemplo 2.1.6 La eliminación de indeterminaciones se basa fundamentalmente en la transformación de la expresión de una sucesión de forma que las propiedades algebraicas sí puedan ser aplicadas. Por ejemplo, si miramos la sucesión $a_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$ como el cociente de los polinomios n^2-1 y n^2+1 cuyos límites son $+\infty$, no podemos aplicar la propiedad sobre el cociente de sucesiones, sin embargo la sucesión puede ser transformada como sigue:

$$a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1} = \frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}};$$

ahora, las sucesiones del numerador y denominador convergen a 1, y por lo tanto, sí podemos aplicar la propiedad sobre el cociente de sucesiones.

$$\lim \frac{n^2-1}{n^2+1} = \lim \frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \text{——}$$

Proposición 2.1.9 *Toda sucesión convergente está acotada.*

Sin embargo, no todas las sucesiones acotadas son convergentes. Por ejemplo, la sucesión $a_n = (-1)^n$ es acotada pero no es convergente.

Proposición 2.1.10 *Toda sucesión monótona y acotada es convergente y, en particular, se verifica*

- *Toda sucesión creciente y acotada superiormente es convergente.*
- *Toda sucesión decreciente y acotada inferiormente es convergente.*
- *Toda sucesión creciente y no acotada superiormente diverge a $+\infty$.*
- *Toda sucesión decreciente y no acotada inferiormente diverge a $-\infty$.*

Ejemplo 2.1.7 La sucesión $a_n = n$ es creciente y no acotada y por tanto, $\lim n = +\infty$. La sucesión $b_n = \dfrac{1}{n}$ es decreciente y acotada inferiormente y en consecuencia convergente. Por la proposición 2.1.8 podemos afirmar que:

$$\lim \frac{1}{n} = 0 \qquad \text{——}$$

En el tema anterior, presentamos el cuerpo de los números reales como el único cuerpo ordenado y *completo*. La propiedad de completitud es justamente la que acabamos de enunciar: *toda sucesión monótona y acotada es convergente*. Por lo tanto, esta debe ser la propiedad que nos permita construir todos los números reales; concretamente, podemos establecer un propiedad más fuerte: *todo número real puede ser construido como límite de una sucesión monótona de números racionales.* Los números racionales pueden ser operados siempre de

forma exacta usando su expresión decimal; sin embargo, los numeros irracionales no pueden ser expresados de esta forma, ya que la secuencia de decimales es siempre infinita y no es periódica. Por esta razón, para muchas aplicaciones prácticas, es necesario trabajar con aproximaciones de los números irracionales, y al forma de determinar estas aproximaciones es construyendo sucesiones monótonas que converjan al número dado. Este es el principal objetivo de la lección siguiente, en donde aprenderemos a construir sucesiones convergentes a un número real dado y a controlar la precisión de sus aproximaciones.

Ejemplo 2.1.8 Consideramos la sucesión a_n definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{1}{a_n} \quad \text{si} \quad n \geq 0 \end{cases}$$

Los términos de esta sucesión son números racionales; vamos a demostrar que a_n es decreciente, acotada inferiormente y que su límite es $\sqrt{2}$.

En primer lugar, demostramos por inducción que la sucesión está acotada inferiormente por 1 y superiormente por 2:

(i) $2 \geq a_0 = 2 > 1$.

(ii) Supongamos que $1 \geq a_k \geq 2$ y demostremos la desigualdad para a_{k+1}:

$$\begin{aligned} 1 \leq &\quad a_k &&\leq 2 \\ \frac{1}{2} \leq &\quad \frac{1}{a_k} &&\leq 1 \\ \frac{1}{2} \leq &\quad \frac{a_k}{2} &&\leq 1 \\ 1 \leq &\frac{a_k}{2} + \frac{1}{a_k} &&\leq 2 \\ 1 \leq &\quad a_{k+1} &&\leq 2 \end{aligned}$$

En el penúltimo paso, hemos sumado, miembro a miembro, las desigualdades de las dos líneas anteriores

Por lo tanto, efectivamente $1 \leq a_n \leq 2$ para todo n.

Para demostrar el decrecimento de la sucesión, observamos en primer lugar que

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n}{2} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n}{2} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n^2 - 2}{2a_n}$$

Por lo tanto, solo tenemos que demostrar que $a_n^2 \geq 2$ para todo n. Esta desigualdad la vamos a demostrar también por inducción.
Trivialmente $a_0^2 = 4 > 2$; si $a_k^2 \geq 2$, entonces

$$a_{k+1}^2 = \left(\frac{a_k}{2} + \frac{1}{a_k}\right)^2 = \frac{a_k^2}{4} + \frac{1}{a_k^2} + 1 \overset{(*)}{\geq} 2\frac{a_{n-1}}{2}\frac{1}{a_{n-1}} + 1 = 2$$

La desigualdad $(*)$ es consecuencia de que $x^2 + y^2 \geq 2xy$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$, ya que

$$\begin{aligned} (x-y)^2 &\geq 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 &\geq 0 \\ x^2 + y^2 &\geq 2xy \end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión a_n es decreciente y acotada y en consecuencia es convergente. Supongamos que $\ell = \lim a_n$; entonces a_{n+1} también converge a ℓ y por lo tanto:

$$\ell = \lim a_{n+1} = \lim \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} = \frac{\ell}{2} + \frac{1}{\ell}$$

y por lo tanto el número ℓ verifica que $\ell^2 = 2$, es decir, $\ell = \sqrt{2}$. ——

El número $\sqrt{2}$ no es un número racional y, por lo tanto, solo podemos trabajar con él usando esta representación o bien utilizando alguna aproximación, como la que podemos obtener a partir de la sucesión del ejemplo anterior. En lección siguiente, veremos cómo determinar otras sucesiones cuyo límite sea también $\sqrt{2}$ pero que sean más eficientes como método de aproximación para ese número.

Hemos afirmado que $\sqrt{2}$ no es un número real, pero no hemos justificado esta afirmación. Vamos a dar una demostración formal usando el método de reducción al absurdo, es decir, vamos a suponer que sí es racional para obtener una conclusión contradictoria. Si $\sqrt{2}$ es racional, entonces existen dos naturales p y q "primos entre sí" y tales que $2 = \frac{p^2}{q^2}$; en tal caso,

$$p^2 = 2q^2 \tag{2.1}$$

y 2 divide a p^2 y en consecuencia a p, pudiendo escribir $p = 2k$; deducimos entonces que:

$$4k^2 = 2q^2 \qquad \text{y de ahí:} \qquad 2k^2 = q^2;$$

por lo tanto, 2 divide a q^2 y en consecuencia a q, lo cual es contradictorio con la elección de p y q como números prims entre sí.

Ejemplo 2.1.9 La sucesión

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es una sucesión creciente y acotada y en consecuencia es convergente. El límite de esta sucesión es un número irracional y transcendente (es decir, no es raíz de ningún polinomio de coeficientes racionales). Así se define el número denotado por e y que es base del logaritmo neperiano y de la función exponencial.

Podemos aproximar el valor de este número tomando valores suficientemente altos de n; en las lecciones siguientes aprenderemos otras formas más eficientes para hacerlo. En concreto, las cinco primeras cifras significativas del número e son: $\mathrm{e} \approx 2.7182\ldots$. ——

El número e se puede utilizar para calcular límites de sucesiones que conducen a la indeterminación 1^∞. Para ello, utilizamos una generalización del límite que hemos visto en el ejemplo anterior.

Proposición 2.1.11 *Si x_n es una sucesión divergente a $\pm\infty$, entonces*

$$\lim \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \mathrm{e}$$

Ejemplo 2.1.10

$$\begin{aligned}\lim \left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{2n} &= \lim \left(1 + \frac{1}{3n-1}\right)^{2n} \\ &= \lim \left(\left(1 + \frac{1}{3n-1}\right)^{3n-1}\right)^{2n/(3n-1)} = \mathrm{e}^{2/3}\end{aligned}$$ ——

Ejemplo 2.1.11 La sucesión

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

es una sucesión decreciente y acotada y, en consecuencia, convergente. El límite se denomina *constante de Euler*, se denota por γ y su valor aproximado es $0.577\ldots$. ——

De la constante γ de Euler se conocen muchas menos propiedades que para el número 'e' o el número π; por ejemplo, no se sabe aún si este número es racional. También se puede utilizar para calcular otros límites.

Ejemplo 2.1.12

$$\lim \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log n} = \lim \frac{a_n + \log n}{\log n} = \lim \left(\frac{a_n}{\log n} + 1\right) = \left(\frac{\gamma}{\infty} + 1\right) = 1$$ ——

Criterios de convergencia Hasta ahora, para calcular los límites, nos hemos límitado ha "reescribir" el término general para poder aplicar las propiedades algebraicas o usar límites conocidos. Esta técnica puede resultar insuficiente en muchos casos, así que necesitamos abordar otro tipo de resultados.

Los resultados que vemos a continuación establecen condiciones para una sucesión que permitan concluir su convergencia o divergencia. Para aplicar estos resultados, debemos asegurarnos de que todas las condiciones exigidas en el criterio son verificadas.

Teorema 2.1.12 (Teorema de Compresión)

1. *Sean a_n, b_n y c_n tres sucesiones tales que $a_n \leq c_n \leq b_n$ y $\lim a_n = \lim b_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$; entonces, $\lim c_n = \ell$.*

2. *Sea a_n una sucesión convergente a 0 y b_n una sucesión acotada; entonces, $\lim a_n b_n = 0$.*

Ejemplo 2.1.13 Para estudiar la convergencia de la sucesión

$$c_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}$$

buscamos dos sucesiones convergentes y con el mismo límite que permitan acotar el término general de la sucesión c_n:

$$0 \leq \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n} \leq n\frac{1}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1}$$

La desigualdad de la izquierda es consecuencia de que cada sumando es positivo. La desigualdad de la derecha se deduce de que cada sumando es menor que el primero,

$$\begin{aligned} n &\geq 1 \\ n^2+n &\geq n^2+1 \\ \frac{1}{n^2+n} &\leq \frac{1}{n^2+1}. \end{aligned}$$

Dado que $\lim 0 = 0 = \lim \frac{n}{n^2+1}$, podemos deducir, aplicando el primer apartado del teorema 2.1.12, que $\lim c_n = 0$. ——

Ejemplo 2.1.14 Aplicando el segundo apartado del teorema 2.1.12, podemos deducir que

$$\lim \frac{\operatorname{sen} n}{n} = 0,$$

pues la sucesión $a_n = \frac{\operatorname{sen} n}{n}$ se puede expresar como producto de una sucesión acotada ($\operatorname{sen} n$) por otra sucesión ($\frac{1}{n}$) convergente a 0. ——

El siguiente resultado se aplica en el cálculo de límites de sucesiones y se asemeja bastante a la regla de L'Hôpital utilizada en el cálculo de límites de funciones.

Teorema 2.1.13 (Criterio de Stöltz-Cesaro) *Sea b_n una sucesión creciente y divergente a $+\infty$ y sea a_n otra sucesión: si el límite*

$$\lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

existe, entonces el límite $\lim \frac{a_n}{b_n}$ *también existe y ambos coinciden.*

Ejemplo 2.1.15 Consideremos la sucesión $\dfrac{1+2+\ldots n}{n^2}$ que verifica las condiciones del teorema 2.1.13. Entonces

$$\lim \frac{1+2+\ldots n}{n^2} = \lim \frac{n+1}{(n+1)^2-n^2} = \lim \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}. \qquad \text{——}$$

Obsérvese en el ejemplo anterior, la conveniencia de aplicar este criterio cuando la sucesión del numerador o del denominador está constituida por una suma de términos. Sin embargo, debemos tener en cuenta que aunque este resultado se suele aplicar en forma de igualdad,

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n},$$

si al estudiar el límite del segundo miembro deducimos que no existe, entonces *no podemos concluir* que el límite del primer miembro tampoco exista; en estas situaciones debemos desestimar el uso de este criterio e intentar otro método.

Ejemplo 2.1.16 Sean $a_n = (-1)^n$ y $b_n = n$ (b_n es creciente y divergente a $+\infty$); en este caso, la sucesión $\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ es la sucesión $\{-2, 2, -2, \ldots\}$ que es divergente y, sin embargo, la sucesión $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{(-1)^n}{n}$ es convergente a 0.

——

Corolario 2.1.14 (Criterio del cociente) *Sea x_n una sucesión de términos positivos tal que* $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$*, entonces,* $\lim \sqrt[n]{x_n} = \ell$.

Este resultado es, efectivamente, una consecuencia del Criterio de Stoltz e igualmente se suele escribir como una igualdad:

$$\lim \sqrt[n]{x_n} = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Sin embargo, debemos tener en cuenta que puede existir el límite del primer miembro y no existir el límite del segundo.

Ejemplo 2.1.17 Si reescribimos la sucesión $a_n = \sqrt[n]{n}$ utilizando la función logaritmo, observamos que una primera evaluación de su límite nos conduce a una indeterminación

$$\lim \sqrt[n]{n} = \lim \exp\left(\frac{\log n}{n}\right) = \exp(0 \cdot \infty)$$

Sin embargo, podemos utilizar el criterio del cociente para su cálculo, ya que

$$\lim \frac{n+1}{n} = 1$$

y en consecuencia $\lim \sqrt[n]{n} = \lim \dfrac{n+1}{n} = 1$ ——

El estudio de la convergencia y el cálculo del límite de una sucesión está relacionado con el comportamiento de los términos de la sucesión *a largo plazo*; por tanto, no es necesario que las condiciones que se exigen en los criterios anteriores se verifiquen para todos los términos de la sucesión, es suficiente que esto ocurra a partir de un término determinado. Por ejemplo, si un criterio exige que la sucesión sea creciente, no importará que los primero términos no verifican esta propiedad, será suficiente si la sucesión es creciente partir de un término.

Subsucesiones Una subsucesión es un subconjunto de términos de la sucesión ordenados de la misma forma y que constituyen una nueva sucesión. La utilidad de las subsucesiones es estudiar el límite de una sucesión *por casos*.

Definición 2.1.15 *Decimos que la sucesión b_n es una subsucesión de a_n si existe una aplicación $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que: $b_n = a_{f(n)}$.*

La condición de crecimiento de f asegura que el orden de los términos de la subsucesión es el mismo que el de los términos de la sucesión de origen.

Por ejemplo, para una sucesión cualquiera, a_n, los términos correspondientes a los índices pares forman una subsucesión,

$$a_{2n} = \{a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}, a_{12}, \dots\};$$

e igualmente, los términos correspondientes a los índices impares,

$$a_{2n-1} = \{a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, a_{11}, \dots\}$$

Ejemplo 2.1.18 La aplicación $f(n) = n^2 - 1$ es creciente, y por lo tanto, a_{n^2-1} es una subsucesión a_n. Para $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ esta subsucesión es:

$$\frac{-1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{-1}{15}, \frac{1}{24}, \frac{-1}{35}, \frac{1}{48}, \dots$$ ——

Los resultados fundamentales sobre sucesiones son los siguientes.

Teorema 2.1.16 *Una sucesión a_n converge a $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ si y solo si toda subsucesión converge a ℓ.*

COROLARIO 2.1.17 *Si b_n y c_n son subsucesiones de a_n tales que $\lim b_n \neq \lim c_n$, entonces la sucesión a_n no es convergente.*

Este es el primer criterio de convergencia que hemos visto cuya conclusión es que una sucesión no es convergente.

PROPOSICIÓN 2.1.18 *Supongamos que dos subsucesiones b_n y c_n de a_n verifican que $\lim b_n = \lim c_n = \ell$ y $\{a_n\} = \{b_n\} \cup \{c_n\}$; entonces, $\lim a_n = \ell$.*

Este resultado se puede generalizar a cualquier familia "finita" de subsucesiones que recubra la sucesión completa.

EJEMPLO 2.1.19 Hemos mencinado anteriormente que la sucesión $a_n = (-1)^n$ no es convergente, pero ahora disponemos de una herramienta sencilla para demostrarlo:

$$\begin{aligned} b_n = a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \quad &\Longrightarrow \quad \lim b_n = 1 \\ c_n = a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \quad &\Longrightarrow \quad \lim c_n = -1 \end{aligned}$$

—

EJEMPLO 2.1.20 Consideremos la sucesión $a_n = \dfrac{\cos(n\pi/2)}{n}$. Las cuatro subsucesiones a_{4n-1}, a_{4n-2}, a_{4n-3} y a_{4n} son convergentes a 0 y constituyen una partición (clasificación exhaustiva y excluyente) de los términos de la sucesión a_n. Por lo tanto, $\lim \dfrac{\cos(n\pi/2)}{n} = 0$. —

Convergencia de sucesiones y funciones Los conceptos de límite de sucesión y límite de función están estrechamente relacionados. De hecho, la convergencia de funciones se puede definir en términos de límites de sucesiones:

TEOREMA 2.1.19 (CARACTERIZACIÓN SECUENCIAL) *Consideremos una función $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in \overline{\mathbb{R}}$. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ si y solo si:* ***para toda sucesión $\{x_n\} \subset D$, con $x_n \neq a$ para todo n, y $\lim x_n = a$, se verifica que $\lim f(x_n) = \ell$.***

Si trabajamos con funciones continuas, entonces podemos sustituir ℓ por $f(a)$ en el teorema. Este resultado tiene importantes consecuencias prácticas respecto del cálculo de límites si lo usamos junto con el siguiente.

TEOREMA 2.1.20

1. *Todas las funciones elementales (ver sección 2.2.5) son continuas en su dominio.*

2. *Si una función está determinada, en un entorno de un punto a, por operaciones algebraicas (suma, producto, cociente y composición) entre funciones elementales, entonces la función es continua en a.*

En la pagina 66 utilizamos estos resultados para justificar la forma en la que estudiamos las sucesiones potenciales-exponenciales:

$$\lim {x_n}^{y_n} = \exp(\lim(y_n \log x_n))$$

Ejemplo 2.1.21

$$\lim \operatorname{sen} \frac{\pi n - 1}{2 + 3n} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ya que $\lim \operatorname{sen} \frac{\pi n - 1}{2 + 3n} = \frac{\pi}{3}$, $\lim_{x \to \pi/3} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$ y la función seno es continua en $\mathbb{R}$. ——

Ejemplo 2.1.22 También podemos usar la caracterización secuencial para demostrar que una función no tiene límite en algún punto. Por ejemplo, así podemos probar fácilmente que la función $\operatorname{sen} x$ NO tiene límite en $+\infty$, es decir, "$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$ *no existe*". Para ello, tomamos dos sucesiones divergentes a $+\infty$:

$$x_n = 2\pi n \qquad\qquad y_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

Dado que:

$$\lim \operatorname{sen} x_n = \lim 0 = 0 \neq 1 = \lim 1 = \lim \operatorname{sen} y_n$$

podemos concluir que la función $\operatorname{sen} x$ no tiene límite en $+\infty$. ——

Otra importante consecuencia de la caracterización secuencial es que podemos utilizar todos los métodos de cálculo de límites de funciones en sucesiones, por ejemplo, la regla de L'Hôpital.

Ejemplo 2.1.23 Para calcular el límite de sucesiones $\lim \frac{\log n}{n}$ consideramos el correspondiente límite de funciones $\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x}$ y aplicamos la regla de L'Hôpital para obtener el resultado:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Como consecuencia de la caracterización secuencial $\lim \frac{\log n}{n} = 0$. ——

Obsérvese que, en el ejemplo anterior, no se ha aplicado la regla de L'Hôpital en el límite de sucesiones sino en un límite de funciones. Es decir, cambiar la n por la x no es un simple cambio de letra, con él representamos el cambio de considerar la expresión como función en lugar de como sucesión.

Infinitésimos e infinitos equivalentes La equivalencia de sucesiones es la última herramienta que introducimos para el cálculo de límites, aunque también la utilizaremos en la lección siguiente para el estudio de series.

DEFINICIÓN 2.1.21 *Dos funciones f y g, son equivalentes en a si*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

La equivalencia de funciones es realmente importante en los casos en que las dos funciones converge a 0 o divergen a $\pm\infty$ en a, ya que en ellos la definición de equivalencia da indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ respectivamente.

DEFINICIÓN 2.1.22

1. *Decimos que la función $f(x)$ es un infinitésimo en a si $\lim_{x\to a} f(x)=0$ y $f(x)\neq 0$ en un entorno reducido de a.*

2. *Decimos que la función $f(x)$ es un infinito en a si $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$.*

EJEMPLO 2.1.24 Para ver que $\operatorname{sen} x$ y x son dos infinitésimos equivalentes necesitamos comprobar que

1. efectivamente son infinitésimos,

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sen} x=0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} x=0,$$

2. y que son equivalentes,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\overset{(L'H)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$ ——

EJEMPLO 2.1.25 Las funciones polinomicas son infinitos en $a=\infty$ y son equivalentes al monómio de mayor grado:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0}{a_nx^n}=\lim_{x\to\infty}1+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}=1$$ ——

En el teorema siguiente vemos cómo se puede utilizar la equivalencia de funciones en el cálculo de límites de funciones.

TEOREMA 2.1.23 *Sean f y g dos infinitésimos (resp. infinitos) equivalentes en a y $h(x)$ otra función definida en un entorno de a. Entonces: $\lim_{x\to a} f(x)h(x)$ existe si y solo si $\lim_{x\to a} g(x)h(x)$ existe, y en tal caso coinciden.*

Este teorema justifica la técnica que se conoce como *sustitución de infinitésimos o infinitos equivalentes* ya que, en la práctica, las equivalencias dadas

en el enunciado, se convierten en igualdades, de forma que, en las condiciones del teorema, escribimos:

$$\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{g(x)}$$

Los infinitésimos e infinitos también pueden sustituirse si aparecen dividiendo al resto de la función o sucesión y en general tendríamos que, en las condiciones del teorema anterior, y para cualquier $\alpha\in\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{(f(x))^{\alpha}}=\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{(g(x))^{\alpha}}$$

No podemos sustituir infinitésimos o infinitos en otras situaciones y, en particular, no se pueden sustituir si aparecen como sumando. En el siguiente ejemplo, una incorrecta sustitución de infinitésimos nos lleva a un resultado erróneo.

Ejemplo 2.1.26 El siguiente desarrollo es incorrecto

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x^3}\neq\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$$

pues se han aplicado infinitésimos equivalentes ($\operatorname{sen}x\equiv x$ en 0) en una suma. El límite puede calcularse correctamente utilizando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{\operatorname{sen}x}{6x}=\frac{1}{6}$$

———

Las equivalencias fundamentales de infinitésimos son:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}x &\equiv x && \text{en } 0\\
\operatorname{tg}x &\equiv x && \text{en } 0\\
1-\cos x &\equiv \frac{x^2}{2} && \text{en } 0\\
\operatorname{arc\,sen}x &\equiv x && \text{en } 0\\
\operatorname{arc\,tg}x &\equiv x && \text{en } 0\\
\mathrm{e}^x-1 &\equiv x && \text{en } 0\\
\log(1+x) &\equiv x && \text{en } 0
\end{aligned}$$

A partir de estas se pueden obtener muchas otras con los siguientes resultados:

Teorema 2.1.24 *Sean f y g dos infinitésimos (resp. infinitos) equivalentes en a y sea $h(x)$ continua en b y tal que $h(b)=a$. Entonces, $f\circ h$ y $g\circ h$ son infinitésimos (resp. infinitos) equivalentes en b.*

En el enunciado anterior, queda implícito que las composiciones se pueden realizar en un entorno de b.

PROPOSICIÓN 2.1.25 *Si f y g son infinitésimos (resp. infinitos) equivalentes en a y $\lambda \in \mathbb{R}^*$, entonces λf y λg también son infinitésimos (resp. infinitos) equivalentes en a.*

Con estos resultados se pueden deducir otras equivalencias:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(x^2-1) &\equiv x^2-1 && \text{en } 1 \\ a^x-1 &\equiv x\log a && \text{en } 0 \\ \log x &\equiv x-1 && \text{en } 1 \end{aligned}$$

De manera análoga a las funciones, podemos definir las sucesiones equivalentes y trabajar con infinitésimos e infinitos.

DEFINICIÓN 2.1.26 *Decimos que dos sucesiones a_n y b_n, son equivalentes si*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$$

DEFINICIÓN 2.1.27 *Decimos que la sucesión a_n es un infinitésimo si $\lim a_n = 0$ y $a_n \neq 0$ para todo $n \geq N$. Decimos que a_n es un infinito si $\lim a_n = \infty$.*

La caracterización secuencial de límite de función, permite crear equivalencias entre sucesiones infinitesimales.

PROPOSICIÓN 2.1.28 *Sean f y g dos infinitésimos (resp. infinitos) equivalentes en a y a_n una sucesión convergente a 'a' y contenida en un entorno reducido de 'a'. Entonces, $f(a_n)$ y $g(a_n)$ son infinitésimos (resp. infinitos) equivalentes.*

EJEMPLO 2.1.27 La equivalencia

$$\operatorname{sen}\frac{1}{n} \quad \equiv \quad \frac{1}{n}$$

es válida, ya que las dos sucesiones son convergentes a cero y las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = x$ son infinitésimos equivalentes en 0. ——

La *Fórmula de Stirling* provee una equivalencia de infinitos y que es imprescindible en muchas ocasiones para trabajar con sucesiones en las que interviene el operador factorial:

$$\lim \frac{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n!} = 1$$

Ejemplo 2.1.28 Para calcular el límite de la sucesión $a_n = \frac{n!}{n^n}$ utilizamos la fórmula de Stirling, el criterio de Stöltz y algunas manipulaciones algebraicas:

$$\begin{aligned}
\lim \frac{n!}{n^n} &= \lim \frac{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n^n} \quad \text{(F. de Stirling)} \\
&= \lim \frac{\sqrt{2\pi n}}{\mathrm{e}^n} \\
&= \lim \frac{\sqrt{2\pi(n+1)} - \sqrt{2\pi n}}{\mathrm{e}^{n+1} - \mathrm{e}^n} \quad \text{(Crit. de Stöltz)} \\
&= \lim \frac{(\sqrt{2\pi(n+1)} - \sqrt{2\pi n})(\sqrt{2\pi(n+1)} + \sqrt{2\pi n})}{\mathrm{e}^n(\mathrm{e}-1)(\sqrt{2\pi(n+1)} + \sqrt{2\pi n})} \\
&= \lim \frac{2\pi}{\mathrm{e}^n(\mathrm{e}-1)(\sqrt{2\pi(n+1)} - \sqrt{2\pi n})} = \left(\frac{2\pi}{\infty}\right) = 0
\end{aligned}$$

En la cuarta igualdad, hemos multiplicado numerador y denominador por la *expresión conjugada* a la que aparecía en el numerador; el objetivo es eliminar las raíces y la indeterminación $(\infty - \infty)$. ——

Ejemplo 2.1.29 El cálculo hecho en el ejemplo 2.1.11 demuestra que las sucesiones $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ y $\log n$ son infinitos equivalentes. ——

Aunque habitualmente utilizamos las equivalencias para "sustituir" funciones arbitrarias por polinomios, en algunos ocasiones puede que necesitemos introducir otro tipo de funciones cuyas propiedades faciliten las simplificaciones posteriores mejor que los polinomios. Este es el caso de la función logaritmo, que puede ayudar a eliminar exponentes. Vamos a utilizar esta idea en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.30 Una primera evaluación del límite que calculamos a continuación conduce a una indeterminación $(\infty - \infty)$.

$$\begin{aligned}
\lim(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) &= \lim \sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{\frac{n+1}{n}} - 1\right) \\
&= \lim \sqrt[3]{n} \log \sqrt[3]{\frac{n+1}{n}} \\
&= \lim \frac{1}{3}\sqrt[3]{n} \log \frac{n+1}{n} \\
&= \lim \frac{1}{3}\sqrt[3]{n}\left(\frac{n+1}{n} - 1\right) \\
&= \lim \frac{1}{3}\sqrt[3]{n}\frac{1}{n} \\
&= \lim \frac{1}{3n^{2/3}} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0
\end{aligned}$$

Tanto en la segunda como en la cuarta igualdad hemos utilizado la equivalencia

$$\log x \equiv x - 1, \quad \text{en } 1;$$

primero para poder "eliminar" el exponente $1/3$ y después para "eliminar" la función logaritmo. ——

Ejercicios básicos

1. Consideremos las siguientes sucesiones:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \qquad b_n = \frac{n}{n+1}$$

   a) Calcule los primeros términos de las sucesiones y deduzca "intuitivamente" las características de las sucesiones (monotonía, acotación y convergencia).

   b) Estudie formalmente las propiedades de monotonía, acotación y convergencia.

2. Consideremos la siguiente sucesión definida por:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 3a_{n-1} \quad \text{si} \quad n > 1 \end{cases}$$

   a) Calcule los primeros términos de las sucesiones y deduzca "intuitivamente" las características de las sucesiones (monotonía, acotación y convergencia).

   b) Determine el término general de la sucesión y calcule su límite.

3. Calcule los siguientes límites

$$\lim \frac{n+3}{n^3+4}, \qquad \lim \frac{n+3n^3}{n^3+4}, \qquad \lim \frac{3-n^5}{n^3+4}$$

   Deduzca la regla que determina el límite del cociente de dos expresiones racionales.

4. Consideremos la sucesión $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = \sqrt{1+a_{n-1}} \end{cases}$

   a) Determine los 5 primeros términos de la sucesión.

   b) Demuestre por inducción que la sucesión es decreciente.

   c) Demuestre por inducción que $1 \leq a_n \leq 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   d) ¿Podemos afirmar que la sucesión es convergente? En tal caso, calcule su límite.

5. Calcule los siguientes límites utilizando las constantes 'e' y γ.

$$a)\ \lim \left(\frac{n+2}{n+4}\right)^{5-n}, \qquad b)\ \lim(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n+1})$$

6. Utilice el teorema de compresión para calcular: $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$.

7. Utilice subsucesiones para calcular el límite de la sucesión

$$\{1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{8}, \dots, \frac{3}{n+2}, 0, \frac{1}{2^{n/3}}, \dots\}$$

8. Utilice el criterio de Stöltz y el del cociente para calcular los siguientes límites:

   a) $\lim \frac{\log(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n)}{n \log n}$, *b*) $\lim \frac{1}{n} \sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\dots(3n+n)}$

9. Consideremos la sucesión $a_n = \sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{n}}$

   a) ¿Es posible utilizar el criterio del cociente para calcula su límite?

   b) Utilice subsucesiones para calcular su límite.

10. Demuestre que no existe el límite $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ y calcule, si es posible, el siguiente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}}$$

11. Calcule el límite $\lim(\sqrt[4]{n} - \sqrt[4]{n-1})$.

LECCIÓN 2.2

Series Numéricas

Estamos acostumbrados a sumar una cantidad finita de números (dos números, tres, cuatro,...) pero ¿es posible sumar un conjunto infinito de números? La intuición nos puede jugar una mala pasada, haciéndonos pensar que al sumar "infinitos" números se obtendrá "infinito". Y, aunque en algunas ocasiones sea así, también es posible que el resultado de sumar "infinitos" números sea un número real.

Por ejemplo, supongamos que nos colocamos a un metro de distancia a un determinado punto y que nos queremos acercar a él dando pasos de la siguiente forma: cada paso tiene como longitud exactamente la mitad de la distancia que nos separa del destino. Si fuéramos capaces de dar pasos "tan pequeños", esta claro que nunca llegaríamos a nuestro objetivo, es decir, por muchos pasos que demos, como mucho recorreríamos 1 metro. Si pudiésemos dar pasos indefinidamente, la distancia recorrida sería

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

y esta "suma infinita" valdría exactamente 1.

Además de formalizar la noción de suma infinita, en esta lección nos vamos a plantear dos cuestiones. Por un lado, vamos a estudiar condiciones que deben cumplir una sucesión de números para poder afirmar que puede ser sumada; por otra parte, en aquellos casos en los que podamos obtener la suma, estudiaremos si es posible hallar el valor exacto o, en caso contrario, obtendremos valores aproximados.

DEFINICIÓN 2.2.1 *Sea a_n una sucesión de números reales.*

1. *La sucesión S_n dada por*

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n$$

se denomina serie numérica asociada a a_n *y se denota* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. *El número a_n se denomina* término n-ésimo de la serie *y el número S_n es* la n-ésima suma parcial de la serie.

3. *Denominaremos* suma de la serie *al límite, si existe, de la sucesión de sumas parciales; si este límite es ℓ, escribiremos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \cdots + a_n + \cdots = \ell$$

Si este límite es un número real, diremos que la serie es convergente*, en caso contrario diremos que es* divergente*; si el límite es $+\infty$ o $-\infty$, diremos que la serie* diverge a $+\infty$ o $-\infty$ *respectivamente.*

4. *La convergencia o divergencia de una serie se denomina* carácter de la serie.

En la definición anterior hemos considerado que el primer elemento de la suma es exactamente a_1; esto lo hacemos por simplicidad, pero en la práctica podremos iniciar la suma en cualquier término de la sucesión. En estos casos, debemos entender que suma parcial S_n es la suma hasta el término a_n. Por otra parte, el sumando incial puede repercutir en el valor de la suma, pero, como veremos más adelantes, no influye en el carácter de la serie.

Ejemplo 2.2.1 Consideremos la sucesión $a_n = \frac{1}{2^n}$, $n \geq 0$. La sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

Utilizando los métodos de la lección anterior, concretamente el criterio de Stöltz, podemos estudiar la convergencia de la serie:

$$\begin{aligned}
\lim S_n &= \lim \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&= \lim \frac{2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2 + 1}{2^n} \\
&= \lim \frac{(2^{n+1} + 2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2 + 1) - (2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2 + 1)}{2^{n+1} - 2^n} \\
&= \lim \frac{2^{n+1}}{2^{n+1} - 2^n} = \lim \frac{2}{2-1} = 2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos escribir: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$. ——

Proposición 2.2.2 *Si la sucesión b_n se obtiene a partir de la sucesión a_n añadiendo, eliminando o modificando un conjunto finito de términos, entonces las series asociadas tienen el mismo carácter.*

En particular, si $a_n = b_m$ para todo $n \geq N_1$ y para todo $m \geq N_2$, entonces las series asociadas a a_n y b_n tienen el mismo carácter. Un ejemplo inmediato donde se ve la importancia de esta propiedad es el siguiente: *las series* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=5}^{\infty} a_n$ *tienen el mismo carácter.*

Esta propiedad es de gran utilidad pues nos dice que, al igual que ocurría con las sucesiones, cuando estudiamos la convergencia de una serie, podemos prescindir de los primeros términos (un conjunto finito cualquiera de ellos). Por ejemplo, si la condición de un teorema es que los términos de la serie sean positivos, también podremos aplicar este resultado a una serie cuyos primeros términos no los sean, con tal de que, a partir de un término, "todos los demás" sean positivos.

Atendiendo a esta propiedad, en adelante, cuando simplemente estemos estudiando el carácter de una serie, no será necesario indicar cuál es el primer término de la misma escribiendo simplemente: $\sum a_n$. Sin embargo, a la hora de calcular la suma de una serie sí es necesario conocer el primer término.

TEOREMA 2.2.3 (SERIE ARMÓNICA) *La serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *se denomina* serie armónica *y es divergente a* $+\infty$.

Hemos enunciado este resultado como teorema por tratarse de una serie destacada muy importante en el estudio general de series; sin embargo, ya lo dedujimos en la lección anterior en el ejemplo 2.1.11, en donde vimos que la sucesión de sumas parciales de la serie armónica, $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, es divergente a $+\infty$.

TEOREMA 2.2.4 *Si la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *converge a 'a' y la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ *converge a 'b', entonces se verifica que*

1. *la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ *converge a 'a + b', y*
2. *la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c\cdot a_n$ *converge a 'c · a', para todo* $c\in\mathbb{R}$.

EJEMPLO 2.2.2 La serie $\sum\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n}\right)$ es divergente. Para demostrarlo, vamos a usar el teorema anterior y a razonar por reducción al absurdo.

Si la serie $\sum\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n}\right)$ fuera convergente, entonces, por el teorema anterior, también lo sería

$$\sum\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n}\right)-\frac{1}{2^n}=\sum\frac{1}{n},$$

lo cual está en contradicción con el teorema 2.2.3. ——

El razonamiento realizado en el ejemplo anterior se puede generalizar fácilmente para demostrar el siguiente resultado

COROLARIO 2.2.5 *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *es divergente, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *es divergente.*

TEOREMA 2.2.6 (CONDICIÓN NECESARIA) *Si una serie* $\sum a_n$ *es convergente, entonces* $\lim a_n = 0$.

La demostración de esta propiedad se basa en la siguiente relación entre el término n-ésimo de la serie y la sucesión de sumas parciales:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

Como S_{n-1} es una subsucesión de S_n que, por hipótesis es convergente, entonces S_{n-1} y S_n tienen el mismo límite y, por lo tanto, $\lim a_n = 0$.

El resultado anterior se denomina *condición necesaria de convergencia* por que establece que es "necesario" que el término general converja a 0 para que la seríe pueda ser convergente. Sin embargo, esta condición no es suficiente; por ejemplo, la sucesión $a_n = 1/n$ converge a 0, pero la serie asociada es divergente.

EJEMPLO 2.2.3 Sabiendo que la sucesión de sumas parciales de una serie es $S_n = \frac{n+1}{\mathrm{e}^n}$ podemos averiguar el término general de la serie

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n+1}{\mathrm{e}^n} - \frac{n}{\mathrm{e}^{n-1}} = \frac{(1-\mathrm{e})n + 1}{\mathrm{e}^n}$$

Como $\lim \frac{n+1}{\mathrm{e}^n} = 0$, entonces (por definición) la serie es convergente y, aplicando la condición necesaria, se obtiene que

$$\lim \frac{(1-\mathrm{e})n + 1}{\mathrm{e}^n} = 0 \qquad \text{——}$$

Obsérvese que este resultado se puede utilizar como criterio de convergencia para calcular el límite de una sucesión a partir de la convergencia de la serie correspondiente.

Otra aplicación de la condición necesaria es utilizarla como método de refutación en el estudio de la convergencia de una serie, considerando el siguiente resultado equivalente:

COROLARIO 2.2.7 *Si* $\lim a_n \neq 0$, *entonces* $\sum a_n$ *es divergente.*

Ejemplo 2.2.4 Aplicando la condición necesaria, deducimos la divergencia de la serie $\sum \frac{n}{n+1}$,, pues $\lim \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$. ——

Teorema 2.2.8 (Serie telescópica) *Sea b_n una sucesión numérica. La serie $\sum_{n=N}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ se denomina* serie telescópica. *Esta serie converge si y solo si la sucesión b_n converge y en tal caso, $\sum_{n=N}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_N - \lim b_{n+1}$.*

Este resultado es una consecuencia directa de la definición de suma de serie como límite de la sucesión de sumas parciales

$$\begin{aligned}\sum_{n=N}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) &= \lim S_n \\ &= \lim(b_N - \cancel{b_{N+1}} + \cancel{b_{N+1}} - \cancel{b_{N+2}} + \cdots + \cancel{b_n} - b_{n+1}) \\ &= \lim(b_N - b_{n+1}) = b_N - \lim b_{n+1}\end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.5 Aunque el resultado anterior pueda parecer trivial, la dificultad de su aplicación está en detectar si efectivamente una serie es telescópica, para ello, en la mayoría de los casos tendremos que transformar la expresión de la serie para obtener la forma adecuad. Por ejemplo, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \log \frac{n+1}{n}$ no parece que sea telescópica tal y como está escrita, pero las propiedades de la función logaritmo permiten deducir que sí lo es.

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \log \frac{n+1}{n} &= \sum_{n=2}^{\infty}(\log(n+1) - \log n) = \lim S_n = \\ &= \lim(\cancel{\log 3} - \log 2) + (\cancel{\log 4} - \cancel{\log 3}) + (\cancel{\log 5} - \cancel{\log 4}) + \\ &\qquad + \cdots + (\cancel{\log(n+1)} - \log n) = \\ &= -\log 2 + \lim \log(n+1) = +\infty\end{aligned}$$

Un error muy común es tratar las series como sumas finitas, operar de la siguiente manera

$$\sum_{n=2}^{\infty}(\log(n+1) - \log n) = (\cancel{\log 3} - \log 2) + (\cancel{\log 4} - \cancel{\log 3}) + (\cancel{\log 5} - \cancel{\log 4}) + \ldots$$

Aparentemente, se simplifican "todos" los sumando escepto $-\log 2$ y podemos concluir errónemanete que esta es la suma de la serie. Por eso, nunca debemos trabajar directamente con la secuencia infinita de sumandos, sino que debemos trabajar con la suma parcial, teniendo en cuenta los últimos sumandos.

——

TEOREMA 2.2.9 (SERIE GEOMÉTRICA) *Si $a \neq 0$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \ldots$ se denomina serie geométrica de término inicial 'a' y razón 'r'. Esta serie verifica:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n \quad \begin{cases} \text{converge a } \dfrac{a}{1-r} & \text{si } |r| < 1 \\ \text{diverge} & \text{si } |r| \geq 1 \end{cases}$$

La serie del ejemplo 2.2.1 es una serie geométrica de razón 1/2; en él calculamos la suma usando el criterio de Stöltz, pero ahora vamos a utilizar otro método que puede utilizarse en otros tipos de series. Concretamente, vamos a simplificar la expresión de la sucesión de sumas parciales de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcccccccccccc} S_n & = & a & + & ar & + & ar^2 & + & \ldots & + & ar^{n-1} & & \\ -rS_n & = & & - & ar & - & ar^2 & - & \ldots & - & ar^{n-1} & - & ar^n \\ \hline (1-r)S_n & = & a & & & & & & & & & & -ar^n \end{array}$$

La igualdad que aparece debajo de la línea se obtiene sumando miembro a miembro las dos anteriores; a partir de ella, se obtiene fácilmente una expresión más simplificada para S_n:

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1-r};$$

tomando límites, deducimos el resultado anterior.

COROLARIO 2.2.10 *La serie $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ es geométrica si y solo is $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \in \mathbb{R}$ para todo n. Además, esta serie converge si y solo si $|r| < 1$ y en tal caso $\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \frac{a_N}{1-r}$.*

EJEMPLO 2.2.6 Estudiamos las siguientes series geométricas

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n+2}}$: Como $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+2}}{3^{n+3}} = \frac{1}{3} = r$, entonces la serie es geométrica de razón $1/3$ y primer término $1/27$; por tanto, la serie es convergente y su suma es $1/18$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{7^n}$: Como $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{3n+3}7^n}{7^{n+1}2^{3n}} = \frac{8}{7} = r$, entonces la serie es geométrica de razón $8/7$ y en consecuencia divergente a $+\infty$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5^{n-1}}$: Como $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-1}{5} = r$, entonces la serie es geométrica de razón $-1/5$ y primer término 1; por tanto, la serie es convergente y su suma es $5/6$. ——

TEOREMA 2.2.11 (SERIE ARITMÉTICO-GEOMÉTRICA) *Las series del tipo*

$$\sum_{n=N}^{\infty}(an+b)r^n, \quad a\neq 0,$$

se denominan series aritmético-geométrica y convergen si y solo si $|r|<1$.

En el caso de que sean convergentes, las series aritmético-geométricas se suman aplicando un proceso similar al utilizado en las series geométricas. Concretamente, repitiendo dos veces el mismo proceso para llegar a una expresión de S_n más simplificada.

EJEMPLO 2.2.7 La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{2^n}$ es una serie aritmético geométrica de razón $\frac{1}{2}$ y, por lo tanto, convergente. Su suma se calcula así:

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
S_n & = & 3 & + & \frac{4}{2} & + & \frac{5}{2^2} & + & \ldots & + & \frac{n+3}{2^{n-1}} & & \\
-\frac{1}{2}S_n & = & & - & \frac{3}{2} & - & \frac{4}{2^2} & - & \ldots & - & \frac{n+2}{2^{n-1}} & - & \frac{n+3}{2^n} \\
\hline
\frac{1}{2}S_n & = & 3 & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2^2} & + & \ldots & + & \frac{1}{2^{n-1}} & - & \frac{n+3}{2^n} \\
-\frac{1}{4}S_n & = & & & -\frac{3}{2} & - & \frac{1}{2^2} & - & \ldots & - & \frac{1}{2^{n-1}} & - & \frac{1}{2^n} \quad - \quad \frac{n+3}{2^{n+1}}
\end{array}$$

Sumando las dos últimas igualdades obtenemos finalmente:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}S_n &= 2-\frac{n+4}{2^n}-\frac{n+3}{2^{n+1}}\\
S_n &= 4\left(2-\frac{n+4}{2^n}-\frac{n+3}{2^{n+1}}\right)\\
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{2^n} &= \lim 4\left(2-\frac{n+4}{2^n}-\frac{n+3}{2^{n+1}}\right)=8
\end{aligned}$$

——

DEFINICIÓN 2.2.12 *Se dice que la serie* $\sum a_n$ *es* hipergeométrica *si* $a_n>0$ *para todo* n *y el término general verifica*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\alpha n+\beta}{\alpha n+\gamma}$$

TEOREMA 2.2.13 (SERIE HIPERGEOMÉTRICA) *Una serie* $\sum a_n$ *hipergeométrica con* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\alpha n+\beta}{\alpha n+\gamma}$ *es convergente si y sólo si* $\gamma>\alpha+\beta$.

En el caso de que sean convergentes, las series hipergeométricas se suman aplicando el siguiente proceso: (1) Escribimos por filas la igualdad $a_{n+1}(\alpha n+\gamma)=a_n(\alpha n+\beta)$ para $n=1$, $n=2,\ldots$, (2) sumamos todos los miembros derechos y todos los miembros izquierdos, y (3) operamos para obtener una expresión de S_n lo más simplificada posible y poder calcular su límite.

EJEMPLO 2.2.8 Para sumar la serie hipergeométrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ procedemos de la siguiente manera: Como $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n}{n+2}$ escribimos, por filas, la expresión "$(n+2)a_{n+1}=na_n$" para $n=1,2,\ldots,n$:

$$\begin{array}{rcl}
3a_2 &=& 1a_1\\
4a_3 &=& 2a_2\\
5a_4 &=& 3a_3\\
\ldots &=& \ldots\\
(n+2)a_{n+1} &=& na_n\\
\hline
3a_2+4a_3+5a_4+\cdots+(n+2)a_{n+1} &=& a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n\\
-a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n+(n+2)a_{n+1} &=& 0\\
S_n-2a_1+(n+2)a_{n+1} &=& 0
\end{array}$$

y de la última expresión deducimos que

$$S_n=2a_1-(n+2)a_{n+1}=2\frac{1}{2}-\frac{n+2}{(n+1)(n+2)}$$

y, por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim\left(1-\frac{n+2}{(n+1)(n+2)}\right)=1 \qquad \text{——}$$

2.2.1. Criterios de convergencia

Estudiar la convergencia de una serie utilizando las sumas parciales no siempre será sencillo; encontrar una expresión para las sumas parciales que permita calcular su límite es, en general, un problema bastante difícil. Por esta razón, el estudio de las series se hará en dos etapas: en primer lugar, se estudiará solamente el carácter de la serie; en segundo lugar, si la serie es convergente, afrontaremos el cálculo de su suma o bien aproximaremos su valor.

En esta sección vamos a estudiar algunos resultados que establecen condiciones que permiten concluir la convergencia de una serie sea convergente. Estos resultados se conocen como *criterios de convergencia* y para aplicarlos será muy importante comprobar que se verifican todas las condiciones exigidas. Por ejemplo, los primeros resultados son aplicables solamente a series cuyos términos (a partir uno dado) son siempre positivos. Estas series verifican la siguiente propiedad, que aunque bastantes intuitiva, tiene importantes aplicaciones de cara a la evaluación aproximada de series.

PROPOSICIÓN 2.2.14 *Si a_n es una sucesión de términos positivos, la sucesión de sumas parciales asociada a ella es creciente y en consecuencia, la serie $\sum a_n$ es o bien convergente o bien divergente a $+\infty$.*

TEOREMA 2.2.15 (CRITERIO DE CONDENSACIÓN) *Sea a_n una sucesión decreciente de términos positivos. Entonces las series $\sum_n a_n$ y $\sum_k 2^k a_{2^k}$ tienen el mismo carácter.*

COROLARIO 2.2.16 (SERIES P-ARMÓNICAS) *Las series $\sum \frac{1}{n^p}$ para $p > 0$ se denominan p–*armónicas*; convergen si $p > 1$, y divergen si $0 < p \leq 1$.*

Por el criterio de condensación, la serie $\sum \frac{1}{n^p}$ tiene el mismo carácter que la serie geométrica $\sum \frac{2^k}{2^{kp}} = \sum \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k$ convergente si y solo si $p > 1$.

La importancia de las series p–armónicas está en que nos ayudarán a estudiar otras series si las utilizamos conjuntamente con otros criterios, como los de comparación o condensación.

EJEMPLO 2.2.9 Para estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$ utilizamos el criterio de condensación (la aparición de la función logaritmo nos indica que puede ser el método adecuado). Dado que las sucesiones n y $\log n$ son crecientes, la sucesión $n(\log n)^2$ es también creciente y $\frac{1}{n(\log n)^2}$ es decreciente; por el criterio de condensación, la serie propuesta tiene el mismo carácter que

$$\sum_k \frac{2^k}{2^k(\log 2^k)^2} = \frac{1}{(\log 2)^2} \sum_k \frac{1}{k^2}$$

que es convergente por ser la serie 2–armónica. ——

TEOREMA 2.2.17 (CRITERIO DE COMPARACIÓN) *Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series tales que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Si $\sum b_n$ converge entonces $\sum a_n$ también converge.*
2. *Si $\sum a_n$ diverge entonces $\sum b_n$ también diverge.*

EJEMPLO 2.2.10 La serie $\sum \frac{1}{n + 2^n}$ es convergente ya que

$$\frac{1}{n + 2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

y la serie $\sum \frac{1}{2^n}$ es convergente (geométrica de razón $1/2$). ——

A veces, en situaciones "parecidas" no es posible aplicar este criterio de comparación estándar. Por ejemplo, la serie $\sum \frac{1}{2^n-n}$ es "parecida" a la del ejemplo anterior e intuimos que también será convergente; sin embargo, no podemos utilizar el criterio de comparación. En estos casos, necesitamos un criterio que permita comparar las expresiones en términos relativos (cociente).

TEOREMA 2.2.18 (COMP. POR PASO AL LÍMITE) *Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos, tal que $b_n \neq 0$ para todo n. Si $\ell = \lim \frac{a_n}{b_n}$ entonces se verifica:*

1. *Si $\ell > 0$ ambas series tienen el mismo carácter.*
2. *Si $\ell = 0$ y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ también converge.*
3. *Si $\ell = \infty$ y $\sum a_n$ converge, entonces $\sum b_n$ también converge.*

EJEMPLO 2.2.11 Veamos varios ejemplos:

1. La serie $\sum \frac{1}{2^n - n}$ es convergente ya que $\sum \frac{1}{2^n}$ es convergente y

$$\lim \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n-n}} = \lim \left(1 - \frac{n}{2^n}\right) = 1$$

2. La serie $\sum n \operatorname{sen} \frac{1}{n^2}$ es divergente pues $\sum \frac{1}{n}$ diverge y

$$\lim \frac{n \operatorname{sen} \frac{1}{n^2}}{1/n} = \lim \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n^2}}{1/n^2} = 1$$

3. La serie $\sum \frac{1}{\log n}$ es divergente pues $\sum \frac{1}{n}$ diverge y

$$\lim \frac{\frac{1}{\log n}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n}{\log n} = \lim \frac{n+1-n}{\log(n+1) - \log n} =$$
$$= \lim \frac{1}{\log \frac{n+1}{n}} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = \infty \qquad \text{——}$$

El criterio de comparación por paso al límite se utiliza frecuentemente para eliminar "expresiones despreciables" en el término general de una serie, antes de aplicarle un criterio, con el fin de que los cálculo sean más sencillos.

EJEMPLO 2.2.12 En el denominador de la expresión $\frac{3n-1}{2^n + 5n + \log n}$ el término $5n + \log n$ es "despreciable" frente a 2^n para valores "grandes" de n. Por lo

tanto, consideramos la expresión $\dfrac{3n-1}{2^n}$ que comparamos con la original

$$\lim \frac{\dfrac{3n-1}{2^n}}{\dfrac{3n-1}{2^n+5n+\log n}} = \lim \frac{2^n+5n+\log n}{2^n} = 1$$

Omitimos los detalles del cálculo del último límite, para el cual se usa el criterio de Stöltz. Aplicando el criterio de comparación por paso al límite se deduce las series $\sum \dfrac{3n-1}{2^n+5n+\log n}$ y $\sum \dfrac{3n-1}{2^n}$ tienen el mismo carácter; dado que $\sum \dfrac{3n-1}{2^n}$ es una serie aritmético-geométrica convergente, podemos afirmar que $\sum \dfrac{3n-1}{2^n+5n+\log n}$ es convergente. ——

COROLARIO 2.2.19 *Sean a_n y b_n dos sucesiones positivas e infinitésimos equivalentes; entonces las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ tienen el mismo carácter.*

La siguiente propiedad se deduce fácilmente aplicando el criterio de comparación a las sucesiones a_n y $1/n$, y es útil para el cálculo de algunos límites.

COROLARIO 2.2.20 *Si $\sum a_n$ es una serie de términos positivos y convergente, entonces* $\lim na_n = 0$

La demostración es inmediata usando deducción al absurdo: si el límite fuera distinto de cero,

$$0 \neq \lim na_n = \lim \frac{a_n}{1/n},$$

entonces la serie tendría el mismo carácter que $\sum \dfrac{1}{n}$ que es divergente.

Los criterios estudiados hasta ahora, establecen relaciones entre el carácter de dos series, reducen el estudio del carácter de una serie al estudio del carácter de otra serie. En primer lugar, debemos destacar que la relación se reduce solo al carácter, pero no al de la suma, según vemos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.2.13 Según el criterio de comparación, las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{2^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

tiene el mismo carácter. Veremos más adelante en el curso que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ y ya sabemos que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$. Es decir, aunque el carácter coincide, las sumas son diferentes. ——

Los criterios que estudiamos en el resto de la sección establecen condiciones sobre el término general para deducir su carácter.

TEOREMA 2.2.21 (CRITERIO DE LA RAÍZ) *Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y consideremos el límite $\ell = \lim \sqrt[n]{a_n}$; entonces:*

1. *Si $\ell < 1$ la serie converge.*
2. *Si $\ell > 1$ la serie diverge.*

El caso $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$ queda fuera del teorema anterior, ya que a partir de él no podemos deducir nada: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ verifican que el límite de la condición vale 1 para ambas series y, sin embargo, la primera es divergente y la segunda es convergente.

Otra carácteristica de los criterios que estudiamos en el resto de la sección es que también proveen información sobre los errores estimados al tomar una suma parcial como aproximación de la suma de la serie. Antes de ver el correspondiente resultado para el criterio de la raíz, vamos a observar la siguiente propiedad de la series de términos positivos: *la sumas parciales de estas series son aproximaciones "por defecto" de su suma.* Esta afirmación es consecuencia del hecho de que para estas series, la sucesión de sumas parciales es creciente:

$$S_{n+1} = S_n + a_n > S_n.$$

PROPOSICIÓN 2.2.22 *Sea $\sum a_n$ una serie convergente tal que $\sqrt[n]{a_n} \leq r < 1$ para todo $n \geq N$; si S_n es su sucesión de sumas parciales y S su suma, entonces:*

$$S - S_N \leq \frac{r^{N+1}}{1-r}$$

Si el límite $\lim \sqrt[n]{a_n} = \ell$ es estrictamente menor que 1, podemos aplicar el resultado anterior porque tenemos asegurada la existencia del número r y para cada r la existencia del número N. Para acotar el error cometido al tomar una suma parcial en lugar de la suma exacta, necesitamos entonces determinar los números r y N adecuados para conseguir un error menor que el desado. Los siguientes casos particulares, aunque bastante significativos, nos facilitarán la realización de este tipo de tareas.

- Si $\sqrt[n]{a_n}$ es creciente, para cada N podemos tomar $r = \lim \sqrt[n]{a_n}$.
- Si $\sqrt[n]{a_n}$ es decreciente, para cada N podemos tomar $r = \sqrt[N]{a_N}$, siempre y cuando este número sea menor estrictamente que 1.

El criterio de la raíz y el criterio del cociente para el calculo de límites permiten deducir el siguiente criterio para la convergencia de series.

COROLARIO 2.2.23 (CRITERIO DEL COCIENTE) *Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y consideremos el límite $\ell = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$; entonces:*

1. *Si $\ell < 1$ la serie converge.*
2. *Si $\ell > 1$ la serie diverge.*

El caso $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ queda fuera del teorema anterir, ya que a partir de él no podemos deducir nada: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ verifican que el límite de la condición vale 1 para ambas series y, sin embargo, la primera es divergente y la segunda es convergente.

Igual que el criterio de la raíz, el uso del criterio del cociente nos da información para estimar errores.

PROPOSICIÓN 2.2.24 *Sea $\sum a_n$ una serie convergente tal que $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1$ para todo $n \geq N$; si S_n es su sucesión de sumas parciales y S su suma, entonces:*

$$S - S_N \leq \frac{a_{N+1}}{1-r}$$

Teniendo en cuenta las mismas consideraciones que hicimos para el criterio de la raíz, los siguientes casos particulares nos ayudarán a aplicar este resultado en la estimación de errores.

- Si $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ es creciente, para cada N podemos tomar $r = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
- Si $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ es decreciente, para cada N podemos tomar $r = \frac{a_{N+1}}{a_N}$, siempre y cuando este número sea estrictamente menor que 1.

EJEMPLO 2.2.14 Aplicamos los resultados anteriores a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ para demostrar que es convergente y determinar la suma parcial que estima su suma con un error menor que 10^{-3}:

$$\lim \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$$

Entonces, por el criterio del cociente, la serie es convergente. Además, dado que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1}$ es decreciente y menor que 1 para cada n, si S es la suma

de la serie y S_n la sucesión de sumas parciales:

$$S - S_N < \frac{1/(N+1)!}{1 - \frac{1}{N+1}} = \frac{1}{N \cdot N!}$$

Si queremos que este error sea menor que 10^{-3}, basta considerar $N = 6$:

$$\sum_{n=0}^{6} \frac{1}{n!} = \frac{1957}{720} = 2.7180\widehat{5}$$

Más adelante, veremos que la suma de esta serie es el número e y el valor aproximado que nos da cualquier calculadora es 2.718281828. ——

Ejemplo 2.2.15 Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ podemos utilizar los mismos resultados:

$$\lim \frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{n2^n}} = \lim \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$$

Entonces, por el criterio del cociente, la serie es convergente. Si $x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{2(n+1)}$, entonces:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2(n+1)(n+1)}{2n(n+2)} = \frac{2n^2+4n+2}{2n^2+4n} > 1$$

y en consecuencia $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ es creciente. Por lo tanto, si S es la suma de la serie y S_n la sucesión de sumas parciales:

$$S - S_N < \frac{1}{(N+1)2^N(1-\frac{1}{2})} = \frac{1}{(N+1)2^{N-1}}$$

Si queremos que este error sea menor que 10^{-3}, basta considerar $N = 8$:

$$\sum_{n=1}^{8} \frac{1}{n2^n} = \frac{148969}{215040} = 0,692750186011\widehat{90476}$$

Más adelante, veremos que la suma de esta serie es $\log 2$ y la aproximación que nos da cualquier calculadora es $0,6931471805$. ——

Teorema 2.2.25 (Criterio de Raabe) *Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y consideremos el límite $\ell = \lim n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$; entonces:*

1. *Si $\ell > 1$ la serie converge.*

2. Si $\ell < 1$ la serie diverge.

El caso $\ell = 1$ queda fuera del resultado anterior, ya que a partir de él no podemos deducir nada: para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, el límite de la condición de Raabe vale 1 y es divergente; para la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$ el límite de la condición es 1 y la serie es convergente.

Es recomendable utilizar el criterio de Raabe después del criterio del cociente en el caso en que este no decida nada. Debemos tener en cuenta que las *simplificaciones* realizadas al aplicar el criterio del cociente pueden ser útiles al aplicar el criterio de Raabe, pero NO las posibles sustituciones de infinitésimos.

Como en los anteriores, el uso del criterio de Raabe también nos da información para estimar errores.

PROPOSICIÓN 2.2.26 *Sea $\sum a_n$ una serie convergente tal que $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq r > 1$ para todo $n \geq N$; si S_n es su sucesión de sumas parciales y S su suma, entonces:*

$$S - S_N \leq \frac{N a_{N+1}}{r-1}$$

Teniendo en cuenta las mismas consideraciones que hicimos para el criterio de la raíz, los siguientes casos particulares nos ayudarán a aplicar este resultado en la estimación de errores.

- Si la sucesión $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ es decreciente, para cada N podemos tomar

$$r = \lim n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

- Si la sucesión $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ es creciente, para cada N podemos tomar

$$r = N\left(1 - \frac{a_{N+1}}{a_N}\right)$$

  siempre que este número sea estrictamente mayor que 1.

EJEMPLO 2.2.16 Vamos a usar el criterio de Raabe para probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente (aunque ya lo hemos hecho anteriormente) y determinar la suma parcial que estima su suma con un error menor que 10^{-3}.

$$\lim n\left(1 - \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2}\right) = \lim \frac{2n^2+n}{(n+1)^2} = 2$$

Por el criterio de Raabe, deducimos que la serie es efectivamente convergente. Por otra parte, si $x_n = \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \frac{2n^2+n}{(n+1)^2}$, tenemos que:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(2(n+1)^2+n+1)(n+1)^2}{(n+2)^2(2n^2+n)} = \frac{2n^4+9n^3+15n^2+11n+3}{2n^4+9n^3+12n^2+4n} > 1$$

Es decir, la sucesión $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ es creciente y, por lo tanto, si S es la suma de la serie y S_n su sucesión de sumas parciales:

$$\begin{aligned} S - S_N &\leq \frac{\frac{N}{(N+1)^2}}{\frac{2N^2+N}{(N+1)^2} - 1} \\ &= \frac{N}{N^2-N-1} < \frac{N}{N^2-N-N} = \frac{1}{N-2} \end{aligned}$$

Si queremos que este error sea menor que 10^{-3}, basta considerar $N = 1002$. Más adelante, calcularemos la suma exacta de esta serie y demostraremos que $S = \pi^2/6$; si utilizamos un ordenador para calcular la suma parcial, obtendremos que:

$$\sum_{n=1}^{1002} \frac{1}{n^2} \approx 1,643936560$$

mientras que el valor aproximado de $\pi^2/6$ que nos da cualquier calculadora es $1,644934066$. ——

Los teoremas vistos hasta ahora son válidos solamente para series de términos positivos. En esta, vamos a ver dos resultados que permiten estudiar algunas series con términos de signo arbitrario.

Definición 2.2.27 *Decimos que una serie $\sum a_n$ es* absolutamente convergente *si la serie $\sum |a_n|$ es convergente.*

Teorema 2.2.28 *Toda serie absolutamente convergente es convergente.*

Una serie convergente pero no absolutamente convergente se dice *condicionalmente convergente.*

Definición 2.2.29 *Una serie $\sum a_n$ se dice* alternada *si para todo n se verifica que $a_n/a_{n+1} < 0$; es decir, su término general es de la forma $(-1)^n b_n$ o $(-1)^{n+1} b_n$, en donde $b_n > 0$ para todo n.*

Teorema 2.2.30 (Criterio de Leibniz) *Sea $\sum (-1)^n a_n$ una serie tal que*

1. *la sucesión a_n es decreciente y $a_n > 0$,*

2. $\lim a_n = 0$,

entonces, la serie es convergente. (Obsérvese que, según hemos visto, la condición $\lim a_n = 0$ *es necesaria para cualquier serie.)*

PROPOSICIÓN 2.2.31 *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *una serie en las condiciones del criterio de Leibniz,* S_n *su sucesión de sumas parciales y* S *su suma; entonces:*

$$|S_N - S| < a_{N+1}$$

En la acotación del error tenemos que usar el valor absoluto porque en este caso el error puede ser por exceso o por defecto.

EJEMPLO 2.2.17 Vamos a usar el criterio de Leibniz para probar que la serie armónica alternada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ es convergente y determinar la suma parcial que estima su suma con un error menor que 10^{-3}.

1. la sucesión $\frac{1}{n}$ es decreciente y de términos positivos,
2. $\lim \frac{1}{n} = 0$,

Por el criterio de Leibniz, deducimos que la serie es efectivamente convergente. Por otra parte, si S es la suma de la serie y S_n su sucesión de sumas parciales:

$$|S_N - S| < \frac{1}{n+1}$$

Si queremos que este error sea menor que 10^{-3}, basta considerar $N = 999$. En el tema siguiente, calcularemos la suma exacta de esta serie y demostraremos que $S = -\ln 2$; si utilizamos un ordenador para calcular la suma parcial, obtendremos que:

$$\sum_{n=1}^{999}\frac{(-1)^n}{n} \approx -0'6936474305$$

mientras que el valor aproximado de $-\log 2$ que nos da cualquier calculadora es $-0'6931471805$. ——

2.2.2. Esquemas prácticos

En esta sección vamos a presentar algunas estrategias para abordar el estudio de la convergencia de series numéricas. El siguiente esquema resume los criterios que hemos introducido en el orden más adecuado para su aplicación.

1. Comprobar si es una serie conocida: geométrica, armónica, cociente de polinomios, telescópica, ... (A lo largo de este tema y el siguiente, se estudian distintos tipos de series; tener en cuenta las series ya conocidas puede ahorrar mucho trabajo).

2. Condición necesaria. Esta es la primera comprobación que debe hacerse si el límite es fácil de calcular.

3. Criterios del cociente–Raabe o criterio de la raíz. El criterio del cociente o el de la raíz son los primeros que conviene utilizar; elegir uno u otro depende de la forma del término general de la serie. Optaremos preferiblemente por el criterio del cociente cuando sea posible, ya que permite utilizar posteriormente el de Raabe.

4. Criterio de condensación. Es conveniente utilizarlo, cuando sea posible, en series donde interviene la función logaritmo.

5. Comparación. Si ninguno de los criterios anteriores decide el carácter de la serie, intentaremos buscar una serie conocida con la que poder compararla; solo la práctica y la resolución de bastantes problemas facilita esta etapa.

El cociente a_{n+1}/a_n. Como ya se habrá comprobado, el estudio del cociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ es de gran utilidad para la determinación del carácter de una serie. A continuación, recogemos toda la información que puede obtenerse de dicho cociente; dentro del esquema de la sección anterior, el estudio de este cociente se incluirá en el primer paso.

1. Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \in \mathbb{R}$ entonces la serie es una serie geométrica.

2. Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}$ con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ la serie es hipergeométrica (ver ejercicios).

3. Si $a_n > 0$ y $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ para todo $n > N$, la sucesión a_n es creciente y por tanto su límite no puede ser 0: *la serie es divergente.*

4. Si $a_n > 0$ y $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ para todo $n > N$, la sucesión a_n es decreciente.

Sucesiones decrecientes. El criterio de condensación y el criterio de Leibniz incluyen, entre sus condiciones, el decrecimiento de una sucesión. Rapasamos a continuación los distintos métodos que hemos visto y utilizado para demostrar que una sucesión es decreciente:

1. Si $a_n - a_{n+1} > 0$, entonces a_n es decreciente.
2. Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, entonces a_n es decreciente.
3. Si $f\colon [N, +\infty) \to \mathbb{R}$ es una función decreciente tal que $f(n) = a_n$ para todo $n \geq N$, entonces a_n es una sucesión decreciente a partir de N (para determinar si una función es decreciente podemos utilizar su derivada).
4. Por último, podemos utilizar las propiedades algebraicas de la relación de orden para deducir algunas propiedades sobre monotonía de sucesiones y funciones como por ejemplo:
   a) Si f y g son funciones crecientes, entonces $f + g$ creciente.
   b) Si f y g son funciones crecientes y positivas, entonces $f \cdot g$ es creciente.
   c) f es creciente si y solo si $-f$ es decreciente.
   d) Si f es positiva, entonces f es creciente si y solo si $1/f$ es decreciente.
   e) Si f y g son funciones crecientes, entonces $f \circ g$ es creciente.
   f) Si f es una función creciente y d_n es una sucesión decreciente, entonces $f(\mathrm{d}_n)$ es una sucesión decreciente.
   g) Si h es una función decreciente y d_n es una sucesión decreciente, entonces $f(\mathrm{d}_n)$ es una sucesión creciente.

2.2.3. Series de potencias

Algunas de las series que hemos estudiado hasta ahora contenían parámetros en su término general, incluso hemos podido sumar alguna de ellas dando su suma en función de ese parámetro:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

Como hemos podido comprobar, no siempre es asequible sumar una serie, pero aun así podemos estar interesados en estudiar las propiedades de la serie e incluso la relación de dependencia de la serie respecto de ese parámetro.

En esta sección y en la siguiente, vamos a estudiar un tipo de función cuya expresión se escribe mediante una serie cuyo término general depende de la variable de la función, las series de potencias.

DEFINICIÓN 2.2.32 *Una* serie de potencias *es una función definida por una expresión de la forma:*

$$f(x) = \sum_n a_n (x-a)^n$$

El número a se denomina centro *de la serie.*

Tal y como acordamos en la lección anterior, omitimos los límites de los sumatorios por simplicidad y porque el sumando inicial de la serie no influye en sus características. Sí tendremos que explicitarlo cuando necesitemos trabajar con el valor real de la suma.

Ejemplo 2.2.18

1. $\sum_n \frac{(x-1)^n}{n}$ es una serie de potencias centrada en 1; en este caso, $a_n = \frac{1}{n}$.
2. $\sum_n \operatorname{sen}^n x$ no es una serie de potencias. ——

Teorema 2.2.33 *Toda serie de potencias $\sum a_n(x-a)^n$ converge absolutamente para cada $x \in I$, en donde I es, o bien $\mathbb{R}$, o bien un intervalo tal que $(a-R, a+R) \subset I \subset [a-R, a+R]$. En el segundo caso, el número R se denomina* radio de convergencia *de la serie.*

El intervalo I se denomina *campo de convergencia* de la serie y es el dominio de la función determinada por la serie de potencias. Por las características de la expresión de una serie de potencias, bastará con aplicar el criterio del cociente o el de la raíz para hallar el radio de convergencia, sin embargo, necesitaremos trabajar algo más para estudiar la convergencia de la serie en los dos extremos del campo.

Ejemplo 2.2.19 Para hallar el campo de convergencia de $\sum \frac{(x-1)^n}{\log n}$, aplicamos el criterio del cociente a la sucesión de valores absolutos:

$$\lim \frac{|x-1|^{n+1}}{\log(n+1)} \cdot \frac{\log n}{|x-1|^n} = |x-1| \lim \frac{\log n}{\log(n+1)} = |x-1|$$

Por lo tanto, la serie converge si $|x-1| < 1$. Por el teorema anterior, solo tenemos que analizar la convergencia de la serie para $x = 0$ y $x = 2$ para determinar completamente el campo de convergencia. Para $x = 0$ la serie resultante es $\sum \frac{(-1)^n}{\log n}$ cuya convergencia podemos deducir con el criterio de Leibniz. Para $x = 2$ la serie resultante es $\sum \frac{1}{\log n}$, cuya divergencia podemos deducir con el criterio de condensación. Por lo tanto, el campo de convergencia de la serie es $[0, 2)$. ——

El siguiente resultado establece la continuidad y derivabilidad de las funciones definidas por series de potencias y extiende la propiedades algebraicas de la derivación e integración a series.

Teorema 2.2.34 *Para la serie de potencias $S(x) = \sum a_n(x-a)^n$ se verifica que:*

1. *(Teorema de Abel) la función S es continua en su campo de convergencias.*

2. *S es una función derivable en el interior del campo de convergencia y su derivada se obtiene "derivando término a término la serie":*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_n a_n(x-a)^n\right) = \sum_n n a_n (x-a)^{n-1}$$

   Además, el radio de convergencia de la derivada coincide con el de S.

3. *Una primitiva de la función S es:*

$$\int\left(\sum_n a_n(x-a)^n\right)\mathrm{d}x = \sum_n \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$$

   Además, el radio de convergencia de la primitiva coincide con el de S.

En los dos último puntos del teorema anterior se afirma la coincidencia de los "radios" de convergencia, pero no de los "campos" de convergencia, es decir, la convergencia en los extremos del campo puede variar al derivar o integrar.

Ejemplo 2.2.20 El campo de convergencia de la serie de potencias $\sum \frac{x^n}{n^2}$ es $[-1,1]$, sin embargo, la serie de las derivadas, $\sum \frac{x^{n-1}}{n}$, no converge en $x=1$ y por lo tanto su campo de convergencia es $[-1,1)$. ——

Las propiedades de derivación e integración de series de potencias constituyen una herramienta fundamental para sumar series, tal y como vemos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2.2.21 En la sección anterior hemos probado que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \text{si } |x|<1.$$

Aplicando el operador primitiva obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \log|1-x| + C = \log(1-x) + C, \quad \text{si } |x|<1.$$

Evaluando ambas expresiones en $x=0$, deducimos que $C=0$. Además, para $x=-1$, la serie converge (criterio de Leibniz) y por el teorema de Abel, la igualdad también se verifica en ese punto. Por lo tanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \log(1-x), \quad \text{si } -1 \le x < 1.$$ ——

2.2.4. Series de Taylor

Las funciones expresadas mediante series de potencias se comportan esencialmente como polinomios, por esta razón, nos planteamos en esta sección expresar cualquier función como serie de potencias. Vamos a ver que, en particular, todas las funciones elementales pueden representarse de esta forma.

Aunque en muchos casos, el método seguido en el ejemplo 2.2.21, permitirá expresar una función como series de potencias, en la mayoría de los casos necesitaremos construirla a partir de su polinomio de Taylor. Recordemos que el polinomio de Taylor de orden n de una función f en el punto x_0 es un polinomio de grado menor o igual que n tal que su valor en x_0 y el valor de las n primeras derivadas coinciden con los de f. Su expresión analítica es:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots \\ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$$

Aunque tiene sentido determinar el polinomio de Taylor en cualquier punto, en la práctica solo es interesante en aquellos puntos para los cuales es posible hallar el valor de sus derivadas sucesivas de manera exacta y poder obtener así polinomios cuyos coeficientes sean números racionales. En la sección 2.2.5 repasamos la familia de funciones conocidas como funciones elementales y determinamos sus polinomios de Taylor en el punto más adecuado.

El primer resultado fundamental para los objetivos de este tema es el siguiente, que caracteriza los polinomios de Taylor de una función como su mejor aproximación polinómica.

TEOREMA 2.2.35 *Sea T_n el polinomio de Taylor de orden n de f en x_0. Entonces, T_n es el único polinomio tal que y:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Es decir, el polinomio T_n es la "mejor aproximación", en un entorno de x_0, por polinomios de grado menor o igual que n. Por ejemplo, en las figuras de la página 14 podemos ver que los polinomios de Taylor de la función exponencial "se parecen" cada vez más a esta función según aumentamos el grado del polinomio, y que el intervalo en el que más se parecen es cada vez mayor.

Otra aplicación de este resultado es el método mostrado en el siguiente corolario para obtener nuevos pares de infinitésimos equivalentes.

COROLARIO 2.2.36 *Sea f una función $(n+1)$-veces derivable en un entorno abierto de x_0. Entonces, $f(x)-T_n(x)$ y $\dfrac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ son infinitésimos equivalentes en x_0.*

EJEMPLO 2.2.22 Para la función exponencial y para $n = 0$, obtenemos la equivalencia $e^x - 1 \equiv x$, en $x = 0$, que aprendimos en el tema anterior. Para $n = 1$ obtenemos que

$$e^x - 1 - x \equiv \frac{x^2}{2}, \text{ en } x = 0.$$

Aunque podemos demostrar fácilmente esta equivalencia usando el Teorema de L'Hôpital, el polinomio de Taylor es la herramienta para construirlos.

———

La posibilidad de aproximar el valor de una expresión matemática, solo es útil si podemos controlar el error que se comete. El teorema siguiente nos da un método para hacerlo cuando usamos polinomios de Taylor.

TEOREMA 2.2.37 (DE LAGRANGE) *Sea f una función definida en un entorno abierto de x_0 y supongamos que f es $(n+1)$-veces derivable en este entorno. Sea T_n el polinomio de Taylor de orden n de f en x_0 y $E_n(x) = f(x) - T_n(x)$. Entonces, para cada $x \neq x_0$ existe un número c (que depende de x y de n) comprendido estrictamente entre x y x_0 y tal que:*

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

La fórmula del resto dada en este teorema se conoce como *fórmula de Lagrange*. Aunque no es la única posible, sí es la más utilizada por su simplicidad. La expresión E_n puede ser negativa, sin embargo, al trabajar con errores, no distinguimos entre errores por exceso y por defecto, y por eso entendemos que el error es su valor absoluto: $\varepsilon = |E_n|$.

EJEMPLO 2.2.23 Para calcular el número 'e' con un tres decimales exactos, debemos evaluar la función exponencial en el punto $x = 1$ con un error $\varepsilon < 10^{-4}$. Si utilizamos el polinomio de Taylor de orden n en 0 de la función exponencial que calculamos en el primer tema (ver sección 2.2.5), cometeremos el siguiente error:

$$\varepsilon = \left| \frac{e^c}{(n+1)!} 1^{n+1} \right| = \frac{e^c}{(n+1)!}, \quad c \in (0,1)$$

Dado que no conocemos el valor de c (y no podemos, ni pretenderemos calcularlo), no podemos conocer el error exacto. Por esta razón, lo que hacemos es

"estimar" dicho error en función de n, sustituyendo el valor de c, o las subexpresiones en dónde aparece, por valores mayores. En este caso, $e^c < e^1 = e < 3$ y por lo tanto:

$$\varepsilon = \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

Si queremos que el error sea menor que 10^{-4}, *basta* con encontrar el primer número natural n tal que $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-4}$, es decir, tal que $(n+1)! > 30000$. Con $n = 7$ lo conseguimos y por lo tanto:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} = \frac{685}{252} = 2.718\widehat{25396}$$

Solo podemos estar seguros de los tres primeros decimales, aunque podemos comprobar que los cuatro primeros decimales coinciden con los que nos da cualquier calculadora. ——

No es difícil observar que los polinomios de Taylor no son más que la sucesión de sumas parciales de la serie asociada a la sucesión $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$; la correspondiente serie se denomina *serie de Taylor* de la función f.

Definición 2.2.38 *Dada una función f infinitamente derivable en un intervalo abierto I, denominamos* serie de Taylor de f en $x_0 \in I$ *a la serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad x \in I$$

Decimos que la serie representa a f en x *si converge a $f(x)$, es decir:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x)$$

Evidentemente la serie de Taylor para x_0 representa a f en x_0 pero puede no hacerlo en otros puntos. La representación de la serie en otros puntos está caracterizada por la convergencia a 0 de la expresión del resto.

Teorema 2.2.39 *La serie de Taylor de f en x_0 representa a f en x si y solo si:*

$$\lim_{n\to\infty} E_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0$$

Ejemplo 2.2.24 La serie de Taylor de la función exponencial la representa en todo su dominio, $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} E_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Para comprobar que este límite es 0, podemos trabajar más fácilmente con su valor absoluto. Si $x < 0$, entonces $e^c < 1$ y por lo tanto

$$\frac{e^c}{(n+1)!}|x|^{n+1} < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Si $x > 0$, $e^c < e^x$ y por lo tanto

$$\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1} < e^x\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

En los dos límite calculados, hemos utilizado la relación que aprendimos en la lección anterior entre polinomios y función exponencial. Por otra parte, obsérvese la necesidad de "eliminar" el número c antes de calcular el límite, ya que este número depende tanto de x como de n y por lo tanto también está afectado por el operador límite. ——

A partir de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = e$ podemos sumar todas las series del tipo $\sum\frac{P(n)}{(n+q)!}$, en donde P es un polinomio de grado p y $q \in \mathbb{Z}$. El criterio del cociente permite demostrar que todas ellas son convergentes y el método que presentamos en el ejemplo siguiente permite calcular su suma.

Ejemplo 2.2.25 Vamos a sumar la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$. Para ello, usando identificación de coeficientes, vamos a expresar el polinomio del numerador de la siguiente forma

$$n^3 = A(n+1)n(n-1) + B(n+1)n + C(n+1) + D$$

Cada sumando, está formado por productos de expresiones consecutivas y todas empezando por $n+1$; como veremos, esto permitira simplificar cada sumando con el factorial del denominador para conseguir que en cada numerador quede una constante y en el denominador solo un factorial. Esta expresión se puede obtener para cualquier polinomio $P(n)$.

Eliminando los paréntesis y agrupando los términos obtenemos

$$\begin{aligned} n^3 = A(n+1)n(n-1) + B(n+1)n + C(n+1) + D = \\ = An^3 + Bn^2 + (B - A + C)n + (C + D), \end{aligned}$$

y por lo tanto, $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, $D = -1$ y de ahí:

$$\frac{n^3}{(n+1)!} = \frac{(n+1)n(n-1) + (n+1) - 1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

Observese que la última simplificación solo es válida para $n \geq 2$ pero la serie se suma desde $n = 1$; por esta razón, en el primer paso del siguiente desarrollo, "apartamos" el primer sumando de la serie:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!} &= \frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}\\ &= \frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)\\ &= \frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\\ &= \frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}\\ &= \frac{1}{2}+\mathrm{e}+(\mathrm{e}-1-1)-(\mathrm{e}-1-1-\frac{1}{2}) = \mathrm{e}+1\end{aligned}$$

En la cuarta igualdad hemos hecho un cambio de variable para que sea más fácil entender los siguientes pasos, pero estos pueden hacerse directamente. Las series que aparecen en la igualdad siguiente se corresponden con el número e, pero dado que no todas empiezan en $n = 0$ es necesario restar los sumandos que faltan. ——

2.2.5. Funciones elementales

Repasamos en esta sección la familia de funciones conocidas como funciones elementales y determinamos para cada una de ellas la correspondiente serie de Taylor.

En particular, en las figuras de las páginas siguientes, vemos la representación simultánea de las funciones exponencial, seno y arcotangente con algunos polinomios de Taylor.

Función Exponencial. Recordemos que el dominio de la función exponencial, $\mathrm{e}^x = \exp x$, es $\mathbb{R}$ y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \qquad\qquad \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$$

El desarrollo de Taylor es:

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{e}^{c_n}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (c_n \text{ entre } 0 \text{ y } x)$$

En el ejemplo 1.1.12, hemos deducido que la serie de Taylor representa a la función exponencial en todo su dominio:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad\qquad x \in \mathbb{R}$$

Función Logaritmo Neperiano. El dominio de la función logaritmo neperiano, $\log x$, es el intervalo $(0, \infty)$ y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log x = \frac{1}{x} \qquad \int \log x \,\mathrm{d}x = x\log x - x$$

Hallamos es desarrollo de Taylor en $x_0 = 1$:

$$\log x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots \\ \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n + \frac{(-1)^n}{c_n^{n+1}(n+1)}(x-1)^{n+1}$$

Estando c_n entre 1 y x. Para establecer la convergencia de la serie de Taylor no hace falta estudiar la convergencia del resto de Taylor. Sabemos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge si y solo si $|x| < 1$ y en tal caso

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Integrando la igualdad anterior y estudiando la convergencia en los extremos de la serie obtenida, llegamos a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x), \qquad x \in [-1, 1)$$

(En 1 la serie diverge y en -1 la serie converge por el criterio de Leibniz). Por lo tanto,

$$\log x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(1-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n \qquad x \in (0, 2]$$

Alternativamente, esta serie se puede escribir como:

$$\log(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad x \in (-1, 1]$$

Función Seno. El dominio es $\mathbb{R}$ y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sen} x = \cos x \qquad \int \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x = -\cos x$$

El desarrollo de Taylor es

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1}(\operatorname{sen} c)\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

siendo c un número entre 0 y x. Además, es fácil comprobar que la serie de Taylor representa a la función seno en todo su dominio:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

En la figura de la página 111, podemos ver las gráficas de la función seno y de algunos de sus polinomios de Taylor. Vemos que, igual que ocurre con la función exponencial, la convergencia de la serie es ¡¡muy rápida¿¿, es decir, con pocos sumando conseguimos unas aproximaciones muy buenas en entornos bastante amplios de 0.

Función Coseno. El dominio de la función coseno es $\mathbb{R}$ y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\operatorname{sen} x \qquad \int \cos x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} x$$

El desarrollo de Taylor es

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}(\operatorname{sen} c)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

siendo c un número entre 0 y x. Además, la serie de Taylor representa a la función coseno en todo su dominio:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Función Seno Hiperbólico. La función seno hiperbólico se define como $\operatorname{senh} x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$, su dominio es $\mathbb{R}$ y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{senh} x = \cosh x \qquad \int \operatorname{senh} x\,\mathrm{d}x = \cosh x$$

El desarrollo de Taylor es

$$\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (\operatorname{senh} c)\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

siendo c un número entre 0 y x. Además, la serie de Taylor representa a esta función en todo su dominio:

$$\operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Función Coseno Hiperbólico. La función coseno hiperbólico se define como $\cosh x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$, su dominio es $\mathbb{R}$ y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh x = \operatorname{senh} x \qquad \int \cosh(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{senh} x$$

El desarrollo de Taylor es

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (\operatorname{senh} c)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

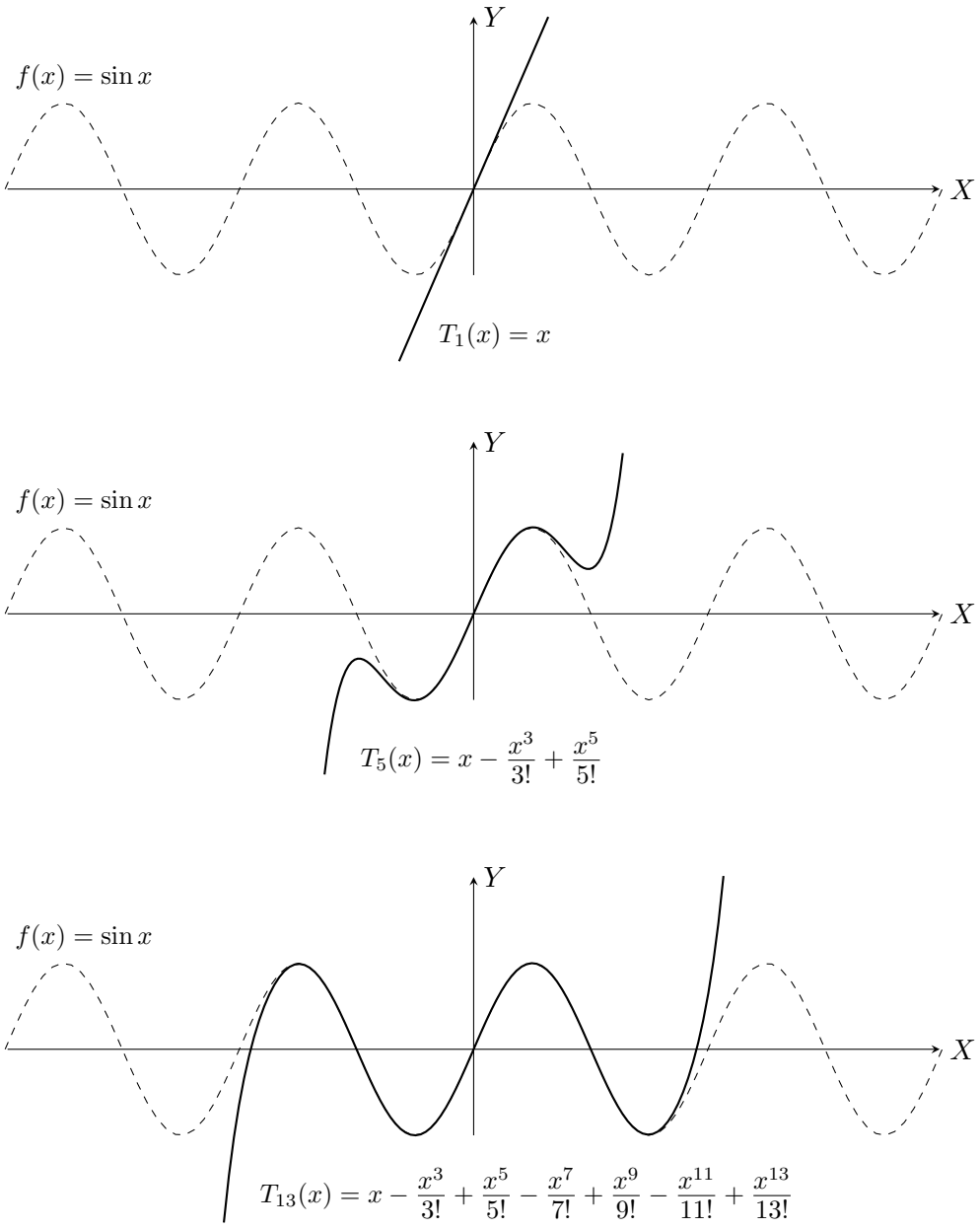


Figura 2.2: Función seno y algunos polinomios de Taylor.

siendo c un número entre 0 y x. Además, la serie de Taylor representa a esta función en todo su dominio:

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Función Potencial. La función potencial se define como

$$p_\alpha(x) = (1+x)^\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$$

El dominio de esta función depende de α: el intervalo $[-1, \infty)$ es el dominio para $\alpha > 0$ y su dominio es $(-1, \infty)$ si $\alpha < 0$. La función potencial es derivable en $(-1, \infty)$ y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x)^\alpha = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

Si $\alpha > 1$, la función también es derivable en -1.

El desarrollo de Taylor es:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}(1+c)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$$

Aunque no es tan simple como para el resto de las funciones elementales, podemos probar que el resto converge a 0 si $x \in (-1, 1)$ y por lo tanto, para todo α:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad x \in (-1, 1)$$

La convergencia en los extremos depende de α. No mostramos los detalles que nos llevan a las siguientes igualdades:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \tbinom{\alpha}{n} x^n, \quad x \in [-1, 1], \quad \alpha > 0$$
$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \tbinom{\alpha}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1], \quad -1 < \alpha < 0$$
$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \tbinom{\alpha}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1), \quad \alpha \leq -1$$

Nos queda por repasar las funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas. Las propiedades algebraicas de las series de potencias nos ayudarán a determinar los desarrollos de estas funciones, pero no podremos utilizar las expresiones del resto de Taylor.

Función Arco–Seno. El codominio de la función arco-seno es $[-\pi/2, \pi/2]$, es decir: $y = \operatorname{arc\,sen} x$ si y solo si $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ y $\operatorname{sen} y = x$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arc\,sen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\int \operatorname{arc\,sen} x \, \mathrm{d}x = x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2}$$

Obtenemos la serie de Taylor a partir de la serie de Taylor de su derivada:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arc\,sen} x = (1+(-x^2))^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-1/2}{n}x^{2n}$$

para $|x|<1$. Tras integrar y estudiar la convergencia en los extremos con el criterio de Raabe, obtenemos:

$$\operatorname{arc\,sen} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\binom{-1/2}{n}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}$$

para $|x|\leq 1$.

Función Arco–Coseno. El codominio de la función arco-coseno es $[0,\pi]$, es decir: $y=\operatorname{arc\,cos} x$ si y solo si $0\leq y\leq\pi$ y $\cos y = x$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arc\,cos} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\int \operatorname{arc\,cos} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arc\,cos} x - \sqrt{1-x^2}$$

El desarrollo de Taylor de la función arco-coseno se obtiene fácilmente a partir de su relación con la función arco-seno: $\operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sen} x$. Obsérvese que, por lo tanto, para aproximar el arco-coseno de un número, tendremos que utilizar a su vez una aproximación adecuada de π.

Función Arco–tangente. El codominio de la función arco-tangente es el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, es decir: $y=\operatorname{arc\,tg} x$ si y solo si $-\pi/2\leq y\leq \pi/2$ y $\operatorname{tg} y = x$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{1+x^2}$$
$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arc\,tg} x - \log(1+x^2)$$

Nuevamente, obtenemos la serie de Taylor a partir de su derivada; por la suma de la serie geométrica sabemos que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \qquad |x|<1$$

Integrando y determinando la convergencia en los extremos con el criterio de Leibniz, obtenemos:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad |x|\leq 1$$

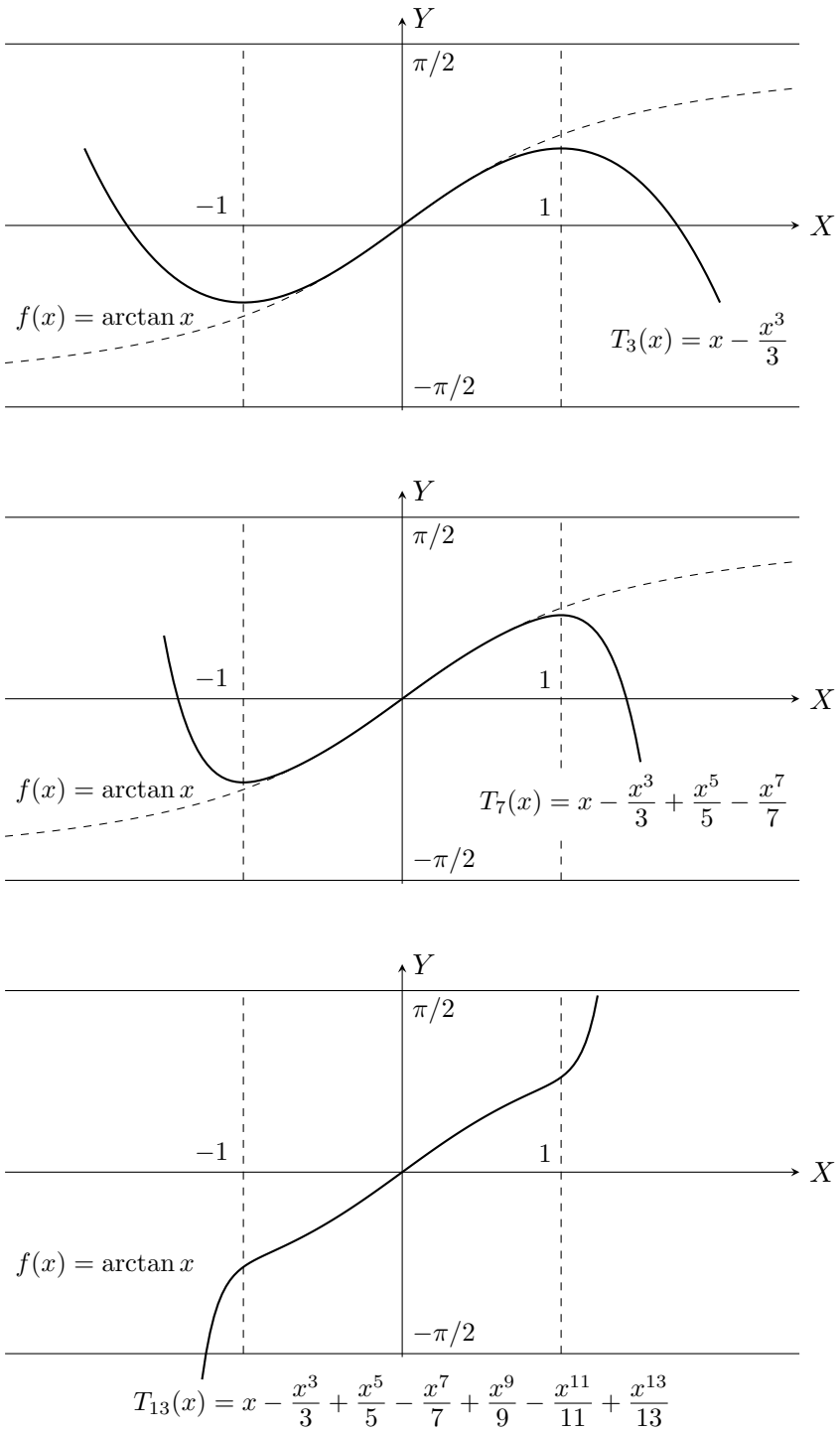


Figura 2.3: Función arcotangente y algunos polinomios de Taylor.

Función Argumento del Seno Hiperbólico. La función inversa del seno hiperbólico se denomina *argumento del seno hiperbólico*, siendo $\mathbb{R}$ su dominio y codominio:

$$\begin{aligned} \operatorname{argsenh} x &= \log(x + \sqrt{1+x^2}) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{argsenh} x &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \int \operatorname{argsenh} x \, \mathrm{d}x &= x \operatorname{argsenh} x - \sqrt{1+x^2} \end{aligned}$$

Obtenemos el desarrollo en serie de Taylor como sigue:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{argsenh} x = (1+x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^{2n}$$

para $|x| < 1$. Integrando esta serie y deduciendo la convergencia en los extremos con el criterio de Raabe, obtenemos:

$$\operatorname{argsenh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \binom{-1/2}{n} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}$$

para $|x| \leq 1$.

Función Argumento del Coseno Hiperbólico. La función inversa del coseno hiperbólico se denomina *argumento del coseno hiperbólico*, siendo $[1, \infty)$ su dominio y $[0, \infty)$ su codominio:

$$\begin{aligned} \operatorname{argcosh} x &= \log(x + \sqrt{x^2-1}) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{argcosh} x &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\ \int \operatorname{argcosh} x \, \mathrm{d}x &= x \operatorname{argsenh} x - \sqrt{x^2-1} \end{aligned}$$

Función Argumento de la Tangente Hiperbólica. La función inversa de la tangente hiperbólica se denomina *argumento de la tangente hiperbólica*, siendo el intervalo $(-1, 1)$ su dominio y $\mathbb{R}$ su codominio:

$$\begin{aligned} \operatorname{argtgh} x &= \log \frac{1+y}{\sqrt{1-y^2}} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{argtgh} x &= \frac{1}{1-x^2} \\ \int \operatorname{argtgh} x \, \mathrm{d}x &= x \operatorname{argtgh} x + \log(1-x^2) \end{aligned}$$

Por la suma de la serie geométrica sabemos que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{argtgh} x = \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

para $|x| < 1$. Integrando esta serie obtenemos:

$$\operatorname{argtgh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad |x| < 1$$

La serie no converge en ninguno de los dos extremos.

2.2.5.1. Evaluación aproximada de Funciones

Como ya sabemos, la principal aplicación del desarrollo de Taylor es la evaluación aproximada de funciones mediante los desarrollos deducidos en la sección anterior. Debemos tener en cuenta que la evaluación aproximada no tiene ninguna utilidad si no se acompaña de una estimación del error cometido. Para esto, podemos utilizar el resto de Taylor o, cuando se posible, las fórmulas de estimación asociadas a los criterios de convergencia de Leibniz, raíz, cociente y Raabe; en estos casos, tras escribir el valor de la función en un punto como una serie numérica y aplicar el criterio adecuado.

Sabemos que algunos desarrollos de Taylor son válidos solamente en una parte del dominio, en estos casos, tendremos que utilizar algunas manipulaciones algebraicas para evaluar las funciones en el resto de los puntos:

- Función logaritmo. El desarrollo de Taylor de la función logaritmo permite evaluar $\log x$ para $x \in (0, 2]$; para $a \in (2, \infty)$ podemos utilizar la siguiente igualdad:
$$\log a = -\log \frac{1}{a}$$
- Función potencial. Para evaluar una función potencial fuera del intervalo $(-1, 1)$ podemos utilizar el método que se muestra en el siguiente ejemplo: si queremos aproximar $\sqrt[3]{10}$, multiplicamos y dividimos dentro de la raiz por 2^3:
$$\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{\frac{10}{8}8} = 2\sqrt[3]{1+\frac{1}{4}} = 2p_{1/3}(1/4)$$
- Función arcocoseno. No disponemos de serie de Taylor para la función arcocoseno, pero la igualdad:
$$\operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sen} x$$
ayuda a evaluar de forma aproximada esta función utilizando la función arcoseno y una aproximación de π.
- Función arcotangente. Fuera del intervalo $[-1, 1]$ podemos utilizar la siguiente igualdad para aproximar la función arcotangente:
$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$$

2.2.5.2. Suma de series numéricas

Las series de potencias, y las series trigonométricas que estudiamos en la sección siguientes, permiten sumar muchas series numéricas. En la siguiente tabla resumimos las series de Taylor que hemos deducido anteriormente para las funciones elementales:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x,\qquad x\in\mathbb{R}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\log(1-x),\qquad x\in[-1,1)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\operatorname{sen}x,\qquad x\in\mathbb{R}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\cos x,\qquad x\in\mathbb{R}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\operatorname{senh}x,\qquad x\in\mathbb{R}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\cosh x,\qquad x\in\mathbb{R}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=(1+x)^{\alpha},\qquad x\in(-1,1)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}=0,\qquad \alpha>0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}=2^{\alpha},\qquad \alpha>-1,\alpha\neq 0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\binom{-1/2}{n}x^{2n+1}=\operatorname{arc\,sen}x,\qquad |x|\leq 1$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}=\operatorname{arc\,sen}x,\qquad |x|\leq 1$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\operatorname{arc\,tg}x,\qquad |x|\leq 1$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\binom{-1/2}{n}x^{2n+1}=\operatorname{argsenh}x,\qquad |x|<1$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}=\operatorname{argsenh}x,|x|<1$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\operatorname{argtgh}x,\qquad |x|<1$$

Ejercicios básicos

1. Calcule la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ utilizando los siguientes métodos de la lección anterior: con la ayuda de las constante de Euler determine los límites de las subsuceciones S_{2n} y S_{2n+1} y deduzca a partir de ahí el límite de la sucesión de sumas parciales S_n.

2. Estudie la convergencia de las siguientes series analizando si son telescópicas.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(n+1)} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\log\Big(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\Big)$$

3. Utilice las propiedades elementales para estudiar la convergencia de las siguientes series y obtenga la suma de las convergentes.

$$a)\sum_{n=0}^{\infty}5\Big(\frac{1}{2}\Big)^n+\frac{3n^2}{5-n} \qquad b)\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\frac{3^{2n}}{9^{2n-1}} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n}$$

4. Determine cuáles de las siguientes series son aritmético-geométricas y súmelas sin utilizar ninguna fórmula:

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{5^n} \qquad c)\ \sum_{n=2}^{\infty}(2n-1)\mathrm{e}^n$$

5. Determine cuáles de las siguientes series son hipergeométricas y súmelas sin utilizar ninguna fórmula.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}, \qquad b)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(a+1)\cdots(a+n)}{n!}, \qquad c)\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

6. Estudie el carácter de las siguientes series:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}},\ a\geq 0$$

7. Las tablas de infinitésimos e infinitos equivalentes que hemos estudiado en la lección anterior nos ayudan a determinar series con el mismo carácter a través del criterio de comparación. Utilizar esta idea para estudiar el carácter de las siguientes series:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n^2}, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{2n^3-1}$$

8. Consideremos la sucesión $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$ para algún $x > 0$.

   a) Estudie la convergencia de la serie $\sum a_n$.

   b) ¿Podemos deducir le valor $\lim a_n$?

9. Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n}$ es convergente y aproxime el valor de su suma con un error menor que 10^{-3}.

10. Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n}$ es convergente y aproxime su suma con un error menor que 10^{-3}.

11. Hallar los campos de convergencia de las series de potencias siguientes:

    a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-5)^n$ *c*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n!}$

    d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^2}(x-1)^n$ *e*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

12. Utilice el teorema 2.2.35 para demostrar que $T(x) = x - \frac{x^3}{3}$ es el polinomio de Taylor de la función $\operatorname{arc\,tg} x$ de orden 3 en el punto $x = 0$.

13. Queremos aproximar el valor de $\sqrt{\mathrm{e}}$, ¿qué función considera más adecuada para este objetivo, la función exponencial o la función raíz cuadrada? Razone la respuesta y utilice la función elegida para aproximar dicho número con un error menor que 10^{-3} (dos decimales exactos).

14. Lea la parte de la sección 2.2.5 dedicada a las funciones potenciales y posteriormente conteste los siguientes apartados

    a) Evalúe y simplifique el número combinatorio $\binom{1/2}{n}$ para $n = 0, \ldots, 4$.

    b) Simplifique la expresión $\binom{1/2}{n}$

    c) Utilice la expresión obtenida en el apartado anterior para excribir el polinomio de Taylor de orden n en 0 de la función $f(x) = \sqrt{1+x}$.

    d) Siguiendo las indicaciones de la sección 2.2.5.1, construya una serie cuya suma sea $\sqrt{5}$ y elija el método más adecuado para aproximar su valor con un error menor que 10^{-3}.

15. Considere la función $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x}$.

    a) Utilice el polinomio de Taylor de la función exponencial, su expresión del resto de Lagrange y las propiedades algebraicas para obtener el polinomio de Taylor de f y una expresión de su resto.

b) ¿El resto obtenido en el apartado anterior es el resto de Lagrange de la función f? En cualquier caso, utilícelo para hallar $f(1/4)$ con un error menor que 10^{-4}.

16. Utilice el teorema 2.2.36 para determinar un infinitésimo equivalente $x^2 - \cos x^2 + 1$ en 0. Úselo para calcular el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \cos x^2 + 1}{x^3 \mathrm{e}^x}$$

17. Determine la serie de Taylor de la función $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$ usando el siguiente proceso.

a) A partir de la serie de $\dfrac{1}{1-x}$, obtenga por derivación la de $\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

b) Exprese la función g como suma de fracciones simples.

c) Utilice las propiedades algebraicas y los apartados anteriores para construir la serie de Taylor de f.

18. Obtenga la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2^{n+1}}$ usando el siguiente proceso:

a) Sume la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ usando las propiedades de derivación y las propiedades algebraicas de las series de potencias que permitan reducirla a una serie más simple.

b) Evalúe la serie del apartado anterior en un valor de x adecuado para poder sumar la serie propuesta.

19. Siguiendo el método del ejemplo 2.2.25, sume la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - 2}{n!}$.

20. Sume la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ (Indicación: $\int \log t \, \mathrm{d}t = t \log(t) - 1$).

Relación de ejercicios (I)

1. Responder las siguientes preguntas razonando las respuestas con «precisión»:

   a) Dadas dos sucesiones a_n y b_n consideramos los conjuntos de sus elementos: $A = \{a_n\}$, $B = \{b_n\}$. Si $A = B$, ¿podemos afirmar que $\lim a_n = \lim b_n$?

   b) Es cierto que ¿toda sucesión acotada es convergente?

   c) ¿Es correcto escribir la igualdad simbólica $\frac{\infty}{0} = \infty$?

   d) Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \operatorname{sen} n$, ¿podemos afirmar que el límite $\lim \sqrt[n]{a_n}$ no existe?

   e) Las sucesiones $a_n = \operatorname{sen} n$ y b_n ¿son infinitésimos equivalentes?

2. Determine el término general de la siguiente sucesión y calcule su límite

$$0, 0'9, 0'99, 0'999, 0'9999, \ldots$$

3. Consideremos las siguientes sucesiones:

$$a_n = \frac{-3n+5}{n} \quad , \quad b_n = (-3)^n \quad , \quad c_n = \frac{n^2-3n}{n!} \quad , \quad \mathrm{d}_n = \frac{1}{\sqrt{n+4}}$$

   Para cada una de ellas, calcule los primeros términos, analice intuitivamente sus propiedades (monotonía, acotación y convergencia) y finalmente estúdielas formalmente.

4. Calcule y exprese de la forma más simplificada posible los primeros términos de las siguientes sucesiones

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}, \qquad b_n = \frac{(n+1)(n+2)\cdot(n+n}{2n(2n+1)(2n+2)\ldots(2n+n)}$$

5. Consideramos la siguiente sucesión definida por recurrencia:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} - 3 \quad \text{si} \quad n > 1 \end{cases}$$

   a) Calcule los diez primeros términos de la sucesión y analice intuitivamente sus características (monotonía, acotación y convergencia).

   b) Estudie formalmente las propiedades de monotonía, acotación y convergencia.

   c) Deduzca el término general de la sucesión.

6. Demuestre que si kn^p es el término de grado mayor en el polinomio $P(n)$, entonces $a_n = P(n)$ y $b_n = kn^p$ son infinitos equivalentes.

7. Demuestre que $a_n = \log(n+k)$, $b_n = \log(kn)$ y $c_n = \log n$ son infinitos equivalentes y utilícelo para calcular el límite

$$\lim \frac{3\log(n-7)}{2\log(5n)}$$

8. Demuestre que $a_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha$ y $b_n = \alpha n^{\alpha-1}$ son infinitos equivalentes.

9. Calcule el límite $\lim \dfrac{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\sqrt[3]{\mathrm{e}}\ldots\sqrt[n]{\mathrm{e}}}{n}$

10. Escribiendo el cociente $\dfrac{1}{m(m+1)}$ como suma de fracciones simples, simplifique la expresión de la sucesión en siguiente límite para calcularlo:

$$\lim\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

11. Resuelva los siguientes límites:

$$a)\ \lim\left(n-\sqrt{(n+a)(n+b)}\right) \qquad b)\ \lim n\,(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n-1]{a})$$

12. Los siguientes límites se resuelven utilizando el criterio de Stöltz o el criterio del cociente:

$a)\ \lim \dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}, (p\in\mathbb{N})$

$b)\ \lim \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}$

13. Sea a_n una sucesión tal que $\lim a_n = a$; utilice el criterio de Stöltz para calcular

$$\lim \frac{a_1+\dfrac{a_2}{2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n}}{\log n}$$

14. Utilice el teorema de compresión para calcular el límite de las sucesiones:

$$a)\ \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\ldots(1+\sqrt{n})} \qquad b)\ \frac{(-1)^n}{n}$$

15. Utilice la constante de Euler para calcular el siguiente límite

$$\lim \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$$

16. Utilice la caracterización secuencial y el teorema de L'Hôpital para calcular $\lim \dfrac{n^\alpha}{\mathrm{e}^n}$.

17. Razonar con «exactitud» sobre la veracidad de las siguientes afirmaciones:

a) Si a una serie le quitamos un conjunto finito de términos, la suma de la serie no varía.

b) Si una serie es convergente, el límite de su término general es 0.

c) Si el límite de una sucesión es 0, la serie asociada es convergente.

d) Si $\sum a_n$ es una serie de términos positivos y convergente, entonces $\sum a_n^2$ también es convergente.

e) Si $\sum a_n$ es una serie de términos positivos y convergente, entonces $\sum \sqrt{a_n}$ también es convergente.

f) Consideremos la serie $\sum(-1)^n/n$; por el criterio de condensación, el carácter de esta serie coincide con el de la serie $\sum 2^k \frac{(-1)^{2^k}}{2^k} = \sum 1$ que es divergente. Por tanto, la serie $\sum(-1)^n/n$ es divergente.

18. Demuestre que la siguiente serie es *telescópica*, estudie su convergencia y súmela si es posible.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)}$$

19. Estudie la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)}$ y súmela aplicando el siguiente procedimiento:

a) Escriba el término general como suma de fracciones simples.

b) Simplifique la expresión de la sucesión de sumas parciales utilizando la constante de Euler.

c) Calcule el límite de la expresión de la sucesión de sumas parciales obtenida en el apartado anterior.

20. Estudie el carácter y sume si es posible las siguientes series:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{3^n} \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n}$$

21. Sume la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2+4+8+\cdots+2^n}{3^n}$

22. Sume las siguientes series aritmético-geométricas:

$$c)\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1-n}{5^n} \qquad d)\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n-2}{2^n}$$

23. Teniendo en cuenta que es una serie hipergeométrica, sume la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

24. *Criterio del logaritmo. Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos. Si*

$$k = \lim \frac{\log \frac{1}{a_n}}{\log n}$$

entonces se verifica que

- *Si $k < 1$ la serie diverge.*
- *Si $k > 1$ la serie converge.*

a) Estudie el criterio del logaritmo para estudiar la convergencia de series p-armónicas (corolario 2.2.16).

b) Si es posible, aplique el criterio del logaritmo para estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \qquad b)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{2^n} \qquad c)\ \sum_{n=3}^{\infty} n \qquad d)\ \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n}$$

25. Aplique infinitos equivalentes para encontrar series p-armónicas con el mismo carácter que las siguientes y deduzca su carácter:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 5n + 8}{n - 2} \qquad b)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n^2 + 5n - 3}{2 - 3n^5}$$

26. Repita el ejercicio anterior para una serie del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$, en donde P y Q son dos polinomios de grados p y q respectivamente para deducir que:

a) Si $q - p \leq 1$ la serie diverge.

b) Si $q - p > 1$ la serie converge

27. Sean f y g dos funciones crecientes y estrictamente positivas en su dominio, h una función decreciente, c_n una sucesión creciente y d_n una sucesión decreciente. Utilice las propiedades algebraicas de la relación de orden para demostrar que:

a) $f + g$ es una función creciente.

b) $f \cdot g$ es una función creciente.

c) $1/f$ es una función decreciente.

d) $-f$ es una función decreciente.

e) $f \circ g$ es una función creciente y $f \circ h$ es una función decreciente.

f) $f(c_n)$ es una sucesión creciente y $f(\mathrm{d}_n)$ es una sucesión decreciente.

g) $h(c_n)$ es una sucesión decreciente y $h(\mathrm{d}_n)$ es una sucesión creciente.

28. Estudie el carácter de las siguientes series:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n^3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^r} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^n} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\log n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(3n+2)\cdot n^{4/3}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+1)\cdots(a+n)}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^a}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n+\frac{2n}{n-1}\Big]^{-n} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot\cos^2\frac{\pi n}{3}}{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^1+\cdots+2^n}{4^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos^2 n}{n^3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sin}^3 n}{n^4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2n+\cdots+n^2}{n^5} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n!}\Big) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}\ (a>0) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{sen}\frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{b(b+1)\ldots(b+n-1)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\Big(\frac{\pi}{4n^2}\Big) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^c}{(3n)!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^a(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(an)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2+\ldots n}{n^n}$$

29. Halle los campos de convergencia de las series de potencias siguientes:

$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}n^n x^n$ $\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

$c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n}$ $\qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^n$

$e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+1}x^n$ $\qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{1+2n}}x^n$

$g)\ \sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ $\qquad h)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^n$

$i)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}(x+2)^n$ $\qquad j)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{3^n}(x+3)^n$

$k)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}(x+1)^n$ $\qquad l)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log(1+n)}(x-1)^n$

$m)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{5^n}(x-2)^n$ $\qquad n)\ \sum_{n=1}^{\infty}(\log n)x^n$

$\tilde{n})\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)^n}x^n$ $\qquad o)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-\sqrt{n}}$

$p)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \log \frac{2n+1}{n}$ $\quad$ $q)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!} x^n$

$r)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} (x+1)^n$ $\quad$ $s)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-1)^n$

$t)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} x^n$ $\quad$ $u)$ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\log n)^n}$

30. Utilice el teorema 2.2.35 para demostrar que $1 - \frac{x^2}{2}$ es el polinomio de Taylor de la función $\cos x$ en el punto $x = 0$.

31. $a)$ Calcule e con un error menor que 10^{-8}. ¿Cuántas cifras decimales de esta aproximación son exactas?

    $b)$ Calcule $\operatorname{sen} 1$ con un error menor que 10^{-4}.

    $c)$ Calcule $\log 1'5$ con un error menor que 10^{-4}.

32. Lea la sección 2.2.5.1 y utilícela para construir una serie cuya suma sea $\log 5$. Aproxime la suma de dicha serie, es decir, el valor de $\log 5$, con un error menor que 10^{-3}.

33. Para $n = 1$ y $n = 2$, exprese la función $\sqrt{1+x}$ como suma de su polinomio de Taylor de orden n más el correspondiente resto. Deduzca, para $x > 0$, las siguientes desigualdades:

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$$

34. Para $x > 0$, pruebe que: $\left|(1+x)^{1/3} - (1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9})\right| \leq \frac{5x^3}{81}$

35. Utilizando series de Taylor para determinar los infinitésimos adecuados para calcular el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + \log(1-x^2)}{2\cos x + \mathrm{e}^{x^2} - 3}$$

36. Represente mediante serie de potencias de x las siguientes funciones:

$a)$ $f(x) = \operatorname{senh} x$ $\qquad$ $b)$ $f(x) = \log \dfrac{1+x}{1-x}$

37. Sume la siguiente serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=\infty}^{\infty} (n+1)x^n$

38. Sume las siguientes series:

$a)$ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ $\qquad$ $b)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!}$

Relación de ejercicios (II)

1. Consideramos la siguiente sucesión definida por recurrencia:

$$\begin{cases} b_1 = 3 \\ b_n = b_{n-1} + n \quad \text{si} \quad n > 1 \end{cases}$$

   a) Calcule los diez primeros términos de la sucesión y analice intuitivamente sus características (monotonía, acotación y convergencia).

   b) Estudie formalmente las propiedades de monotonía, acotación y convergencia.

   c) Deduzca el término general de la sucesión.

2. Justifique que las siguientes sucesiones son convergentes y calcule sus límites

$$\begin{cases} c_1 = \sqrt{2} \\ c_n = 2\sqrt{c_{n-1}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{d}_1 = a > 0 \\ \mathrm{d}_n = a + (\mathrm{d}_{n-1})^2 \end{cases}$$

3. Resolver los siguientes límites:

   a) $\lim \dfrac{\log n}{\log 5n}$ *b*) $\lim \dfrac{\log(n+3)}{\log n}$

4. Los siguientes límites se resuelven utilizando el criterio de Stöltz o el criterio del cociente:

   a) $\lim \sqrt[n]{n^2+n}$ *b*) $\lim \dfrac{1}{n^2}(2 + \dfrac{3^2}{2} + \cdots + \dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}})$

   c) $\lim \dfrac{(\log n)^2}{n}$ *d*) $\lim \dfrac{2+4+\cdots+2^n}{3+9+\cdots+3^n}$

5. Utilice el criterio de Stöltz y la equivalencia $(n+1)^\alpha - n^\alpha \equiv \alpha n^{\alpha-1}$ para calcular el límite $\lim a_n = \dfrac{n^{8/3}}{\mathrm{e}^n}$.
   Razone que, aplicando sucesivamente el criterio de Stöltz, se puede llegar a la misma conclusión para el límite $\lim a_n = \dfrac{n^\alpha}{\mathrm{e}^n}$, para cada α

6. Calcule el límite $\lim \dfrac{n!}{n^n}$ utilizando el teorema de compresión.

7. Utilice el teorema de acotación para calcular los siguientes límites:

   a) $\lim \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(n+n)^2}$

8. Calcule el siguiente límite

$$\lim \frac{\log(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}{\log(\log n)}$$

9. Para la siguiente sucesión, determine el término general de la sucesión y calcule su límite.

$$0'3, 0'33, 0'333, 0'3333, \ldots$$

10. Para la siguiente sucesión, determine una forma recursiva de su término general y calcule su límite.

$$\sqrt[5]{4},\ \sqrt[5]{4\sqrt[5]{4}},\ \sqrt[5]{4\sqrt[5]{4\sqrt[5]{4}}}, \ldots$$

11. Supongamos que $\lim a_n = a$; halle los siguientes límites:

    a) $\lim \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2}$

    b) $\lim \dfrac{\mathrm{e}^{a_1} + \mathrm{e}^{a_2/2} + \cdots + \mathrm{e}^{a_n/n} - n}{\log(n+1)}$

12. Demuestre que las siguientes series son telescópicas, estudie su carácter y súmelas si es posible.

    a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$

    c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ *d)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n(n+1)}{2^{n+1}n(n+1)}$

13. Estudie el carácter y sume si es posible la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n}$.

14. Sume las siguientes series aritmético-geométricas:

    e) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} (n+3)\frac{(-1)^n}{2^n}$ *f)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{10^n}$

15. Deduzca la fórmula general de la suma de la serie aritmético geométrica:

$$\sum_{n=N}^{\infty} (an+b)r^n \qquad \text{si} \quad |r| < 1$$

16. Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, a^n}{(1+a)(1+2a)\cdots(1+na)}$ es hipergeométrica y súmela si es posible.

17. Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{b(b+1)\ldots(b+n-1)}$ es hipergeométrica y súmela si es posible.

18. Deduzca una fórmula general para la suma de una serie hipergeométrica.

19. Deduzca el criterio de Pringsheim como corolario del criterio de comparación por paso al límite.
Criterio de Pringsheim. Sea a_n una sucesión de términos positivos y supongamos que $\lim n^c a_n \neq 0$. *Probar que: (1) si* $c > 1$ *entonces,* $\sum a_n$ *converge; (2) si* $c \leq 1$ *entonces,* $\sum a_n$ *no converge.*

20. *Series numéricas e integrales impropias: Si f es positiva, continua y decreciente en $x \geq 1$ y $a_n = f(n)$, entonces*

$$\sum a_n \qquad y \qquad \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

tienen el mismo carácter.
Estudie el carácter de las siguientes series utilizando este resultado cuando sea posible.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}, \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-5}{n^2}$$

21. Consideremos la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} R(n) r^n$, en donde R es una función racional.

   a) Si $|r| \neq 1$, utilice el criterio del cociente para demostrar que la serie converge si y solo si $|r| < 1$.

   b) Si $r = 1$, en la relación anterior hemos analizado el carácter de la serie resultante. Para $r = -1$, demuestre que:

      1) Si $q - p > 1$ la serie converge absolutamente.
      2) Si $q - p = 1$ la serie converge condicionalmente.
      3) Si $q - p < 1$ la serie diverge.

      en donde p es el grado del polinomio del numerador y q es el grado del polinomio del denominador

22. Estudiar el carácter de las siguientes series:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$
   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$
   c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^a}$
   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-2)^n}$
   e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
   f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^a+1} - \sqrt{n^a})$
   g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{n}{7n+4}\Big)^{4n-2}$
   h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$
   i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(9-a^2)n^3 + 3n^2 + 1}{7n^4 - 1}$
   j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^n}$

23. *Progresiones aritméticas.* Son sucesiones en las que cada término se obtiene a partir del anterior sumándole una cantidad fija que llamamos *diferencia*. Una progresión aritmética queda determinada cuando conocemos uno de sus términos y la diferencia; en particular, si a_0 es el primer término y d es la diferencia, entonces el término general es

$$a_n = a_0 + n\mathrm{d} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

a) Si $a_1 = 0$ y $\mathrm{d} = 3$ ¿cuánto vale a_{18}?

b) Si $a_{10} = 14$ y $\mathrm{d} = -2$ ¿cuánto vale a_0?

c) Determine el término general de una progresión aritmética de la que conocemos su término k-ésimo (a_k) y la diferencia (d).

d) Si $2a - 1$, $2a + 1$ y $3a - 2$ son términos consecutivos de una progresión aritmética, ¿cuánto vale a?, ¿cuál es el término general de la progresión?

e) Interpole cinco números en progresión aritmética entre los números 20 y 44.

f) Calcule la suma de los 10 primeros términos de la progresión aritmética $a_n = 2n - 1$.

g) Encuentre la suma de los 100 primeros números pares. ¿Y los 500 primeros?

h) Deduzca la fórmula de la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética.

i) Demuestre que la siguiente fórmula de la suma de los n primeros números naturales:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdot + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

24. *Progresiones geométricas.* Son sucesiones en las que cada término se obtiene a partir del anterior multiplicándolo por una cantidad fija que llamamos *razón*. Por lo tanto, una progresión geométrica queda determinada cuando conocemos uno de sus términos y la razón. En particular, si a_1 es el primer término y r es la razón, el término general es

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad \text{para todo } n$$

a) Demuestre que el cociente entre dos términos consecutivos de una progresión geométrica es constante.

b) Deduzca las condiciones que debe cumplir la razón de una progresión geométrica creciente. ¿Y decreciente? ¿Y constante?

c) Encuentre la razón y el vigésimo término de las progresiones:

$2, 6, 18, 54, 162, ...$ $\quad$ $5, -5, 5, -5, 5, -5, ...$

$8, 4, 2, 1, ...$ $\quad$ $1, \sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, 9, \ldots$

d) Calcule el valor de a para que los números representados por a, $a+2$, $a+8$ sean términos consecutivos de una progresión geométrica.

e) Interpole cuatro números en progresión geométrica entre los números $\frac{4}{5}$ y $\frac{243}{40}$.

f) Deduzca la fórmula de la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica y aplique la fórmula para demostrar que:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdot + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

g) Si $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n = 4095$, ¿cuánto vale n?

h) Una persona comunica un secreto a otras tres. Diez minutos después cada una de ellas lo ha comunicado a otras tres, y cada una de estas a otras tres nuevas en los diez minutos siguientes, y así sucesivamente. ¿Cuántas personas conocen el secreto después de dos horas?

i) Según una leyenda india, el inventor del ajedrez solicitó como recompensa que se pusiera 1 grano de trigo en la primera casilla del tablero, 2 en la segunda, 4 en la tercera, y así sucesivamente; en cada una el doble que en la anterior. El rey aceptó, pero su sorpresa fue grande cuando vio no sólo que no cabían los granos en las casillas, sino que no había suficiente trigo en todo el reino para cumplir el compromiso. Suponiendo que 10 granos de trigo pesan aproximadamente 1 gr. ¿podrías averiguar cuántos Kg. de trigo solicitó el inventor?

25. Utilice el teorema 2.2.35 para demostrar que x es el polinomio de Taylor de la función $\operatorname{sen} x$ en el punto $x = 0$.

26. Utilice el teorema 2.2.35 para demostrar que $-1 + x$ es el polinomio de Taylor de la función $\log x$ en el punto $x = 1$.

27. *a*) Calcule $\sqrt{\mathrm{e}}$ con error menor que 10^{-5}.

    b) Calcule e^2 con error menor que 10^{-5}.

    c) Calcule $\operatorname{sen} 2$ con un error menor que 10^{-4}.

28. Para $f(x) = x^2 \cos x$, hallar $f(7\pi/8)$ con un error menor que 10^{-4}.

29. Para $x \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$, pruebe que:

$$\left|\log(1+x) - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n})\right| < \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

30. Utilizando series de Taylor para determinar los infinitésimos adecuados para calcular el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos x)\operatorname{sen} x - x^3\sqrt[4]{1-x^2}}{x^5 - \operatorname{sen}^5 x} \quad (= \frac{57}{400})$$

31. Sume la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+3n-1}{n!}$

TEMA 3

Curvas planas

Objetivos: Los dos objetivos de fundamentales del tema son: (1) saber parametrizar curvas planas de uso general y reconocer una curva a partir de una parametrización; (2) reconocer y saber identificar las características de las curvas cónicas.

Prerrequisitos: Conocimientos básicos de algebra lineal (ecuaciones de una recta, vectores, etc.). Trigonometría. Cálculo de límites y derivación. Representación gráfica de funciones de una variable (determinar dominio, puntos de corte con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión, etc.)

Contenido

- Lección 2.1: Curvas parametrizadas. Concepto de parametrización y primeros ejemplos. Representación de curvas planas. Curvas polares.
- Lección 1.2: Cónicas. Definición de cónica. Identificación de una cónica a partir de su ecuación cartesiana. Parametrización de cónicas.

El objetivo último de las matemáticas es *modelar* el mundo real. Es decir, representar y describir diversos aspectos del mundo real mediante conceptos matemáticos que ayuden a estudiarlo. En particular, en este tema nos centramos en la representación de objetos y figuras que genéricamente denominamos *lugares geométricos*. Podemos entender fácilmente cuál es nuestro objetivo con el siguiente problema: *traza en un papel tres rectas que se corten formando un triángulo y luego dale indicaciones a un compañero para que haga exactamente el mismo dibujo*. Seguramente, las indicaciones dadas estarán basadas en objetos matemáticos: sistemas de referencias, distancias, ángulos,...

Para lograr resolver el problema anterior no se necesitan demasiados elementos, pero ¿cómo haríamos lo mismo si en lugar de rectas quisiéramos describir una *curva*? Este es el problema general que abordamos en este tema. Aprenderemos a describir curvas, a dibujarlas a partir de una descripción y, en particular, conoceremos un conjunto de curvas ampliamente usadas en matemáticas y física y que se denominan *cónicas*.

Aunque toda la teoría que vamos a mostrar se puede aplicar fácilmente a curvas en el espacio o incluso en dimensiones mayores a 3, nos vamos a centrar solamente en curvas en el plano.

LECCIÓN 3.1

Curvas parametrizadas

Es fácil imaginar una curva como una recta a la que se aplica un determinada deformación. Es decir, una curva es una figura de una única dimensión pero que no sigue una dirección constante. Esta imagen intuitiva nos lleva a la representación más sencilla de una curva: la descripción de cada punto de la misma en función de *un parámetro*. Por ejemplo, si queremos describir la trayectoria que seguimos en un paseo, bastaría con dar nuestra posición en cada instante de tiempo; en este caso, el tiempo sería el parámetro que describe la curva trazada por nuestra trayectoria.

DEFINICIÓN 3.1.1 *Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ se dice que es una* curva parametrizada *si existe un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y dos funciones $x\colon I \to \mathbb{R}$, $y\colon I \to \mathbb{R}$ tales que*

$$C = \{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$$

Habitualmente, presentamos las curvas parametrizadas escribiendo:

$$\begin{cases} X = x(t) \\ Y = y(t) \\ t \in I \end{cases}$$

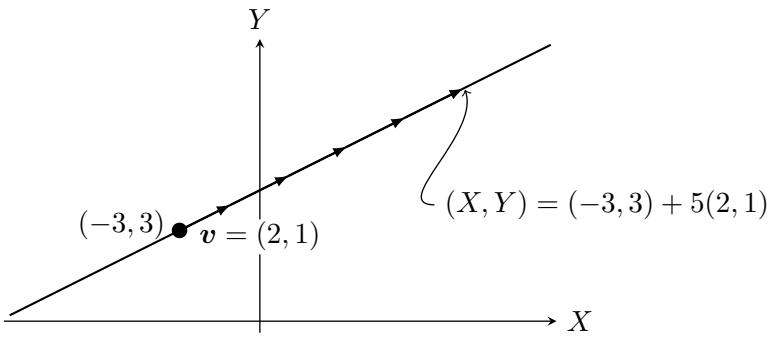
o de forma más compacta $(X, Y) = (x(t), y(t))$, $t \in I$. Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones paramétricas de la curva* y la variable t se denomina *parámetro*.

EJEMPLO 3.1.1 *Ecuaciones paramétricas de una recta.* La recta que pasa por un punto (a, b) en la dirección del vector $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ es:

$$\begin{cases} X = a + v_1 t \\ Y = b + v_2 t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

En este caso, el parámetro t representa la distancia al punto (a, b), siendo la unidad de medida el módulo del vector $\boldsymbol{v}$, es decir, $\|\boldsymbol{v}\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

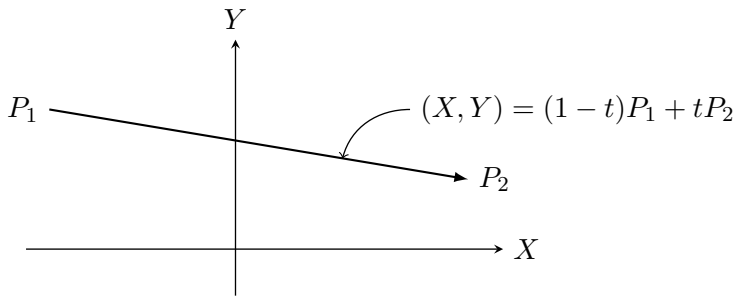
En la figura siguiente, representamos la recta que pasa por $(-3, 3)$ y toma la dirección $(2, 1)$, es decir, $(X, Y) = (-3, 3) + t(2, 1) = (-3 + 2t, 3 + t)$. En la figura, destacamos el punto correspondiente a $t = 5$.



El uso de letras en matemáticas es imprescindible para representar variables, constantes, parámetros,... Ya hemos advertido que habitualmente usamos letras cursivas (mayúsculas o minúsculas) para representar variables que a su vez pueden corresponder a cualquier objeto matemático: números naturales, racionales, reales, complejos, puntos en un plano, vectores,... También hemos podido observar que solemos usar determinadas letras para objetos específicos: x para incógnitas de ecuaciones o para la abscisa de puntos; n, k para números naturales; z para números complejos; t para representar el tiempo,... Debe de quedar claro que estas identificaciones se hacen por tradición y para ayudar a la lectura de fórmulas y expresiones, pero no es obligatorio y en muchos casos no respetaremos estas asociaciones.

Por otra parte, en el ejemplo anterior, hemos usado letras en negrita para representar vectores. Siguiendo con la idea del párrafo anterior, es habitual usar algún elemento distintivo para estos objetos, como la letra negrita que usaremos en el curso o flechas sobre las letras que podemos encontrar en algunos textos. También debe quedar claro que estos elementos no son imprescindibles y solo se usan para facilitar la lectura.

Ejemplo 3.1.2 *Parametrización de un segmento.* En el ejemplo anterior, las ecuaciones se corresponden con una recta infinita. Sin embargo, es frecuente que solo estemos interesados en el segmento que une dos puntos P_1, P_2.



Para parametrizar este segmento, basta tomar el vector director $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1$ y aplicar las ecuaciones del ejemplo anterior: $(X, Y) =$

$P_1 + t\overrightarrow{P_1P_2}$. Sustituyendo el vector por su definición obtenemos

$$(X, Y) = (1 - t)P_1 + tP_2, \quad t \in [0, 1] \tag{3.1}$$

En este caso, el parámetro t es la proporción de la distancia a P_1 respecto de la longitud del segmento, es decir, $t = {}^{|P_1Q|}/_{|P_1P_2|}$, en donde Q es el punto correspondiente al valor t del parámetro. Por ejemplo, el segmento que une los puntos $(-1, -1)$ con $(0, 2)$ es:

$$(X, Y) = (1 - t)(-1, -1) + t(0, 2) = (t - 1, 3t - 1), \quad t \in [0, 1]$$

Es interesante observar que esta parametrización no da únicamente información de los puntos que forman el segmento, también describe *cómo* lo recorremos. En concreto, en la ecuación (3.1), el valor $t = 0$ nos devuelve el punto P_1, mientras que el valor $t = 1$ nos devuelve P_2, es decir, recorremos el segmento desde el punto P_1 al P_2. La siguiente parametrización también corresponde al mismo segmento, pero recorriéndolo en sentido contrario:

$$(X, Y) = (1 - t)P_2 + tP_1, \quad t \in [0, 1] \qquad \text{——}$$

Ejemplo 3.1.3 Ya sabemos que todas las funciones reales de variable real pueden representarse mediante su gráfica. Esta gráfica es un ejemplo de curva parametrizada que se denomina *grafo*:

$$\mathrm{gr}(f) = \{(t, f(t)) \mid t \in \mathrm{Dom}(f)\}$$

Es decir, las siguientes ecuaciones parametrizan el grafo:

$$\begin{cases} X = t \\ Y = f(t) \\ t \in \mathrm{Dom}(f) \end{cases}$$

En este caso, el parámetro coincide con la abscisa del punto. Se podría pensar que todas las curvas pueden ser representadas como grafos de una función, sin embargo, esto no es cierto. Por ejemplo, ninguna función tiene como gráfica a toda una circunferencia, aunque sí trozos de la misma. ——

El concepto matemático que nos ayuda a manejar formalmente las ecuaciones paramétricas es el de *función vectorial de variable real*.

Definición 3.1.2 *Una* función vectorial de variable real *con dominio* $D \subset \mathbb{R}$ *es una aplicación* $\boldsymbol{f}\colon D \to \mathbb{R}^n$. *Esta función* $\boldsymbol{f}$ *viene determinada por* n *funciones reales de variable real,* $f_i\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *de modo que* $\boldsymbol{f}(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$.

Habitualmente, trabajaremos con curvas con un aspecto suave y sin rupturas; para conseguir esto, necesitaremos que las parametrizaciones tengan ciertas características.

DEFINICIÓN 3.1.3 *Sea* $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n)\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$*:*

1. *Decimos que* $\boldsymbol{f}$ *es continua en* $a \in D$ *si todas la funciones* f_i *son continuas en* a*. Decimos que* $\boldsymbol{f}$ *es continua en* D *si lo es en cada punto.*

2. *Decimos que* $\boldsymbol{f}$ *es derivable o diferenciable en* $a \in D$*, si todas la funciones* f_i *son derivables en* a *y llamamos derivada de* $\boldsymbol{f}$ *en* a *al vector:* $\boldsymbol{f}'(a) = (f_1'(a), \ldots, f_n'(a))$*.*

DEFINICIÓN 3.1.4

1. *Una curva* C *se dice* continua *si admite una parametrización continua.*

2. *Una curva se dice* diferenciable *si admite una parametrización derivable.*

3. *Una curva se dice* regular *si admite una parametrización* $\boldsymbol{f}$ *tal que* $\boldsymbol{f}'(t) \neq (0,0)$ *para cada* $t \in I$*.*

El aspecto de una curva continua corresponde a una curva que se puede dibujar de *un solo trazo*. Por otra parte, sabemos que la gráfica de una función derivable tiene un aspecto *suave*, *sin picos*; sin embargo, para describir este tipo de curvas en general, no es suficiente con que la parametrización sea diferenciable, necesitaremos también que sea regular.

EJEMPLO 3.1.4 La gráfica de la función $y = |x|$ es una curva diferenciable, ya que la parametrizacion $(x, y) = (t^3, |t|^3)$, $t \in \mathbb{R}$, es una parametrización diferenciable. Sin embargo, la curva no es regular. ——

Debemos insistir en que el concepto de curva corresponde al subconjunto de puntos y *no a la función vectorial*. De hecho, una curva admite muchas parametrizaciones distintas. Esto supone que, por ejemplo, una curva diferenciable pueda tener parametrizaciones no diferenciables: $(\sqrt[3]{t}, \sqrt[3]{t^2})$ es una parametrización no diferenciable de la gráfica de $f(x) = x^2$, que sí es una curva diferenciable. De la misma forma, una curva regular puede tener parametrizaciones no regulares: (t^3, t^6) es una parametrización diferenciable pero no regular de la gráfica de $f(x) = x^2$, que sí es regular.

En general, no es fácil identificar una curva a partir de una parametrización, sin embargo, no resulta difícil deducir determinadas características que ayudan a esbozar su forma. A continuación mostramos algunas:

- Si $x(t)$ es creciente en un intervalo, la curva se recorre de izquierda a derecha; si es decreciente, se recorre de derecha a izquierda.

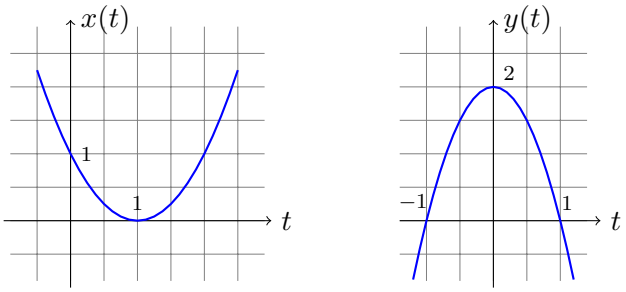
- Si $y(t)$ es creciente en un intervalo, la curva se recorre de abajo hacia arriba; si es decreciente, se recorre de arriba hacia abajo.

- Las ecuaciones $x(t) = 0$ e $y(t) = 0$ determinan los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

EJEMPLO 3.1.5 Vamos a esbozar la curva con la siguiente parametrización:

$$\begin{cases} X = x(t) = t^2 - 2t + 1 \\ Y = y(t) = 2 - 2t^2 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

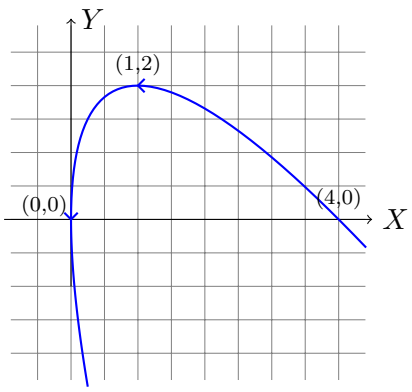
En primer lugar, vamos a representar gráficamente las funciones $x(t)$ e $y(t)$; para ello, son suficientes los conocimientos de cálculo en una variable y por ello no mostramos los detalles



La función x pasa de decrecer a crecer en $t = 1$ y la función y pasa de crecer a decrecer en $t = 0$; los puntos correspondientes a estos valores del parámetro son:

$$(x(0), y(0)) = (1, 2), \qquad (x(1), y(1)) = (0, 0)$$

Por lo tanto: hasta $(1, 2)$ la curva se recorre de derecha a izquierda y de abajo a arriba; desde $(1, 2)$ hasta $(0, 0)$ la curva se recorre de derecha a izquierda y de arriba a abajo; desde el punto $(0, 0)$ se recorre de izquierda a derecha y de arriba a abajo. Teniendo en cuenta que la curva es regular, con la información anterior y situando los puntos de corte con los ejes, es fácil dibujar la curva:



Como hemos mencionado antes, si una curva es regular en un punto, entonces en ese punto la curva no tiene un pico. Geométricamente, esto se traduce en que es posible trazar una recta tangente a la curva en ese punto. Esta recta tangente se define a partir de la derivada de la parametrización.

DEFINICIÓN 3.1.5 *Sea $X = x(t)$, $Y = y(t)$, $t \in I$ una parametrización de la curva C. Si $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0,0)$, las siguientes ecuaciones, determinan la* recta tangente *a C en el punto $(x(t_0), y(t_0))$:*

$$X = x(t_0) + \lambda x'(t_0)$$
$$Y = y(t_0) + \lambda y'(t_0)$$

En donde λ es el parámetro de la recta.

En la definición anterior, la recta tangente se define usando una parametrización; podemos eliminar el parámetro para obtener su ecuación cartesiana:

$$x'(t_0)(Y - y(t_0)) = y'(t_0)(X - x(t_0))$$

EJEMPLO 3.1.6 Si la curva es el grafo de una función real de variable real, es decir, $(X, Y) = (t, f(t))$, entonces, $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = f(x_0)$, $x'(t_0) = 1$ e $y'(t_0) = f'(t_0)$. Sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos la conocida expresión de la recta tangente a la gráfica de una función.

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(X - x_0)$$

EJEMPLO 3.1.7 En la curva del ejemplo 3.1.5,

$$\begin{cases} X = x(t) = t^2 - 2t + 1 \\ Y = y(t) = 2 - 2t^2 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

el vector tangente en $(x(t), y(t))$ es:

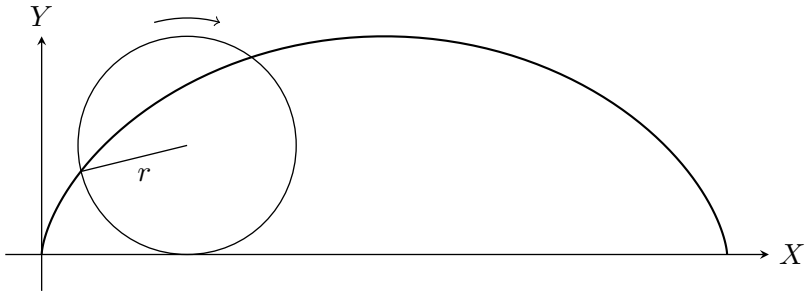
$$(x'(t), y'(t)) = (2t - 2, -4t)$$

Por lo tanto, el vector tangente en $t = 0$ es $(-2, 0)$ y la recta tangente en $(1, 2)$ es paralela al eje OX; el vector tangente en $t = 1$ es $(0, -4)$ y la recta tangente en $(0, 0)$ es paralela al eje OY. ——

Otra interpretación del vector derivada proviene del campo de la física. Si la parametrización corresponde a la trayectoria de un movimiento en función del tiempo, la derivada se corresponde con el vector velocidad.

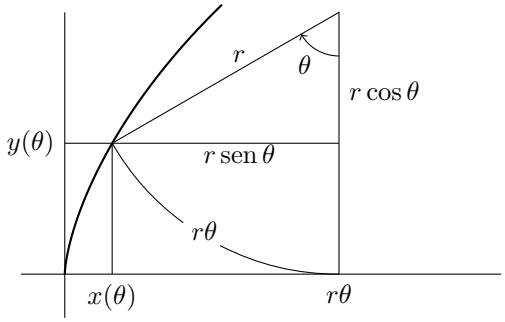
El problema de dar la parametrización de una curva descrita mediante propiedades geométricas suele ser bastante sencillo, ya que, en la mayoría de los casos, solo necesitamos aplicar elementos básicos de geometría.

Ejemplo 3.1.8 En este ejemplo, parametrizamos la curva que se denomina *cicloide* y que se define como sigue: *curva que describe un punto fijo de una circunferencia que rueda sobre una recta.*



Si elegimos como parámetro el ángulo de giro de la circunferencia y tomamos un detalle de la figura anterior, se puede deducir las ecuaciones de la cicloide:

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta - \operatorname{sen}\theta) \\ y(\theta) = r(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

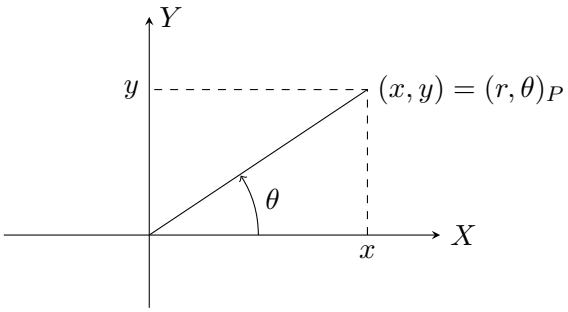


——

3.1.1. Curvas polares

Hemos visto en el tema anterior que una forma alternativa de representar los puntos de un plano es mediante *coordenadas polares*. En general, un sistema de coordenadas polares queda determinado por un punto O, llamado *polo*, y una semirecta con extremo en O, llamada *eje polar*. Dado un punto Q en el plano, consideramos la semirecta R con extremo en el polo y que pasa por Q (*recta radial* del punto); la posición de Q en coordenadas polares se fija por *distancia del punto al polo*, r, y el *ángulo θ entre el eje polar y la recta radial* medido en el sentido contrario a las agujas del reloj; el par $(r, \theta)_p$ es la descripción por *coordenadas polares* del punto Q.

El sistema cartesiano y el sistema polar se superponen identificando el polo con el origen de coordenadas y el eje polar con el semieje positivo de OX.



Definición 3.1.6 *Dada una función $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, llamamos* curva polar *asociada a f al conjunto de puntos $(f(\theta), \theta)_p$ del plano polar.*

Es decir, la curva polar asociada a f queda determinada por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} X = f(\theta)\cos\theta \\ Y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta \\ \theta \in D \end{cases}$$

Aunque la parametrización anterior permite estudiar las curvas polares como cualquier curva paramétrica, es conveniente utilizar las propiedades específicas de este tipo de curvas.

Proposición 3.1.7 *Si $f'(\theta_0) = 0$, entonces la curva polar correspondiente y la circunferencia de centro en el origen y radio $f(\theta_0)$ son tangentes en el punto $(f(\theta_0), \theta_0)_P$.*

Proposición 3.1.8 *Si $f(\theta_0) = 0$ y $f'(\theta_0) \neq 0$, entonces la recta radial con ángulo θ_0 es tangente a la curva polar correspondiente en el punto $(f(\theta_0), \theta_0)_P$.*

La demostración de este resultado es inmediata considerando la parametrización correspondiente a la curva polar:

$$x'(\theta) = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$
$$y'(\theta) = f'(\theta)\operatorname{sen}\theta + f(\theta)\cos\theta$$

Si $f(\theta_0) = 0$, entonces para ese ángulo se anula el segundo sumando de las dos derivadas anteriores y

$$x'(\theta_0) = f'(\theta_0)\cos\theta_0$$
$$y'(\theta_0) = f'(\theta_0)\operatorname{sen}\theta_0$$

Si ademas $f'(\theta_0) \neq 0$, entonces efectivamente el vector $(x'(\theta_0), y'(\theta_0))$ es efectivamente paralelo a $(\cos\theta_0, \operatorname{sen}\theta_0)$.

EJEMPLO 3.1.9 Vamos a dibujar la curva polar $r = 1 + 2\cos\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$. La parametrización de esta curva es:

$$\begin{cases} X = (1 + 2\cos\theta)\cos\theta \\ Y = (1 + 2\cos\theta)\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

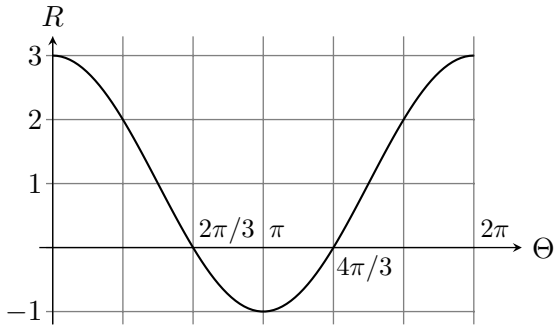
Pero en lugar de usarla para dibujar la curva, vamos a representar primero la función en el plano cartesiano y a trasladar la gráfica al plano polar usando las propiedades establecidas en los resultados anteriores, según se muestra en la página 144.

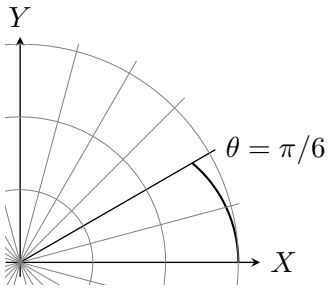
En primer lugar, dibujamos sobre los ejes de coordenadas un "mallado polar" sobre el que dibujaremos la curva. Esta malla es similar a la cuadrícula que dibujamos en el plano cartesiano y que nos sirve de referencia; pero en este caso, la malla está formada por rectas radiales correspondientes a ángulos significativos y circunferencias centradas en el origen con diferentes radios.

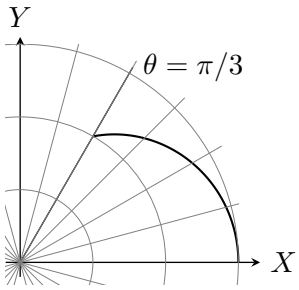
———

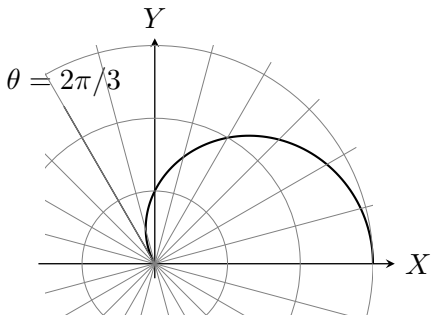
3.1.2. Asíntotas

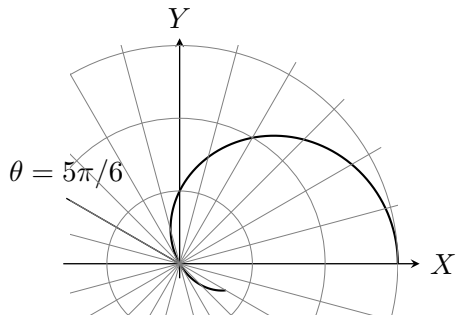
Intuitivamente, una recta es asíntota de una curva si la distancia entre ambas va decreciendo a 0 al desplazarnos sobre la recta. El estudio de la existencia de una asíntota es diferente dependiendo de si la recta es vertical, horizontal u oblicua. El siguiente resultado muestra las condiciones que debemos comprobar para determinar la existencia de asíntotas.

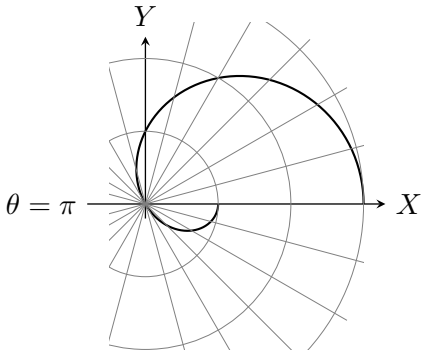

R
3
2
1
−1
2π/3
π
4π/3
2π
Θ

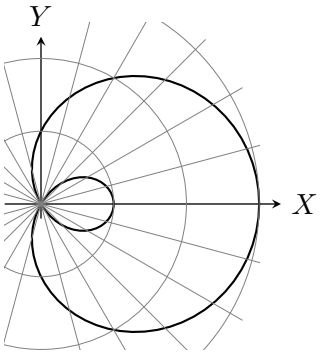

Y
θ = π/6
X


Y
θ = π/3
X


Y
θ = 2π/3
X


Y
θ = 5π/6
X


Y
θ = π
X


Y
X

PROPOSICIÓN 3.1.9 *Consideremos una curva* $(x(t), y(t))$, $t \in I$.

1. *Si para un valor del parametro* t_0, $\lim_{t\to t_0} x(t) = a$ *y* $\lim_{t\to t_0} y(t) = \infty$, *entonces la recta* $X = a$ *es una asíntota vertical de la curva.*

2. *Si para un valor del parametro* t_0, $\lim_{t\to t_0} x(t) = \infty$ *y* $\lim_{t\to t_0} y(t) = a$, *entonces la recta* $Y = a$ *es una asíntota horizontal de la curva.*

3. *Si para un valor del parametro* t_0, $\lim_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$, $\lim_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$ *y* $\lim_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = m \in \mathbb{R}$, *entonces* $Y = mX + n$ *es una asíntota de la curva, en donde* $n = \lim_{t\to t_0} (y(t) - mx(t))$.

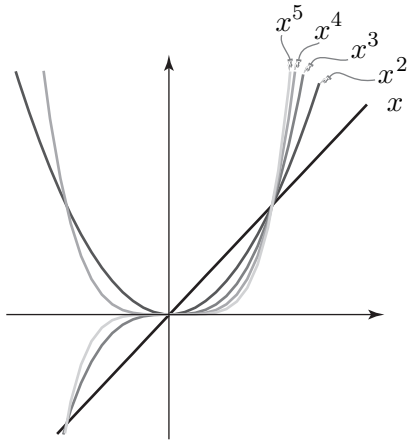
Los tres apartados se verifican igualmente si consideremos t_0 *igual a* $\pm\infty$.

Obsérvese que las asíntotas se localizan en valores del parámetro que no pertenecen al dominio de, al menos, una de las dos coordenadas.

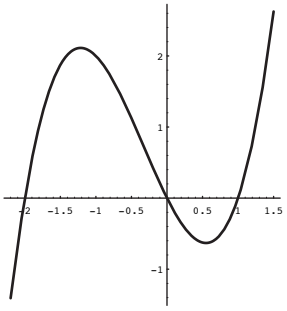
3.1.3. Funciones elementales: gráficas

Denominamos funciones elementales a las siguientes: funciones polinómicas, funciones exponenciales, funciones logarítmicas, funciones trigonométricas y funciones potenciales. Se llaman elementales porque a partir de ellas y mediante operaciones algebraicas (sumas, productos, composición,...) podemos construir la mayoría de funciones de uso general en aplicaciones prácticas. A lo largo del curso, nos referiremos a ellas para repasar sus propiedades más importantes y en la mayoría de las ocasiones, la resolución de los ejercicios se basará en el conocimiento de dichas propiedades.

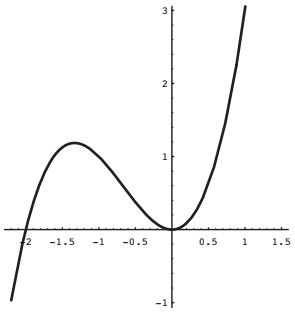
En particular, en este tema será de gran ayuda tener presentes sus representaciones gráficas, con las que visualizaremos fácilmente muchas de sus propiedades, como el crecimiento o decrecimiento y el valor de algunos límites. Por esta razón, recogemos en esta sección sus gráficas y la de algunas funciones definidas a partir de ellas, como las funciones hiperbólicas y las funciones racionales.

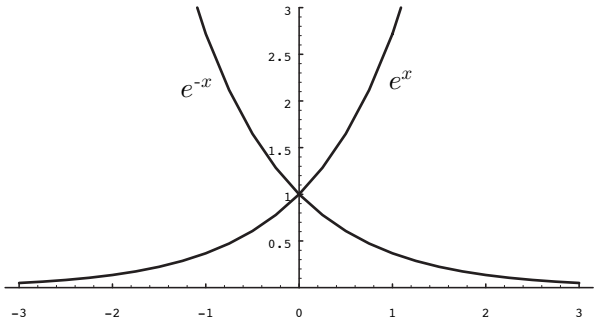


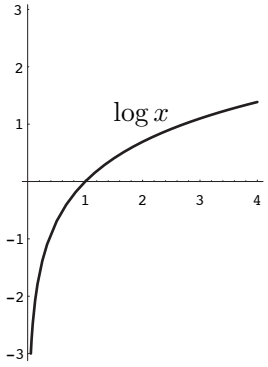
$x(x-1)(x+2)$



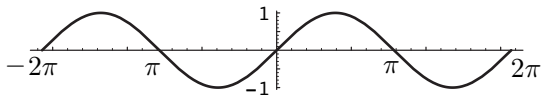
$x^2(x+2)$



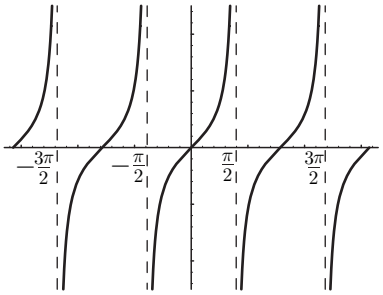




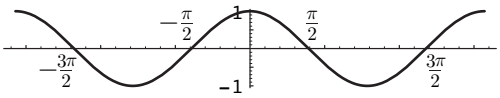
sen x



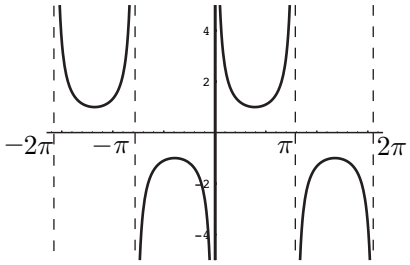
tg x



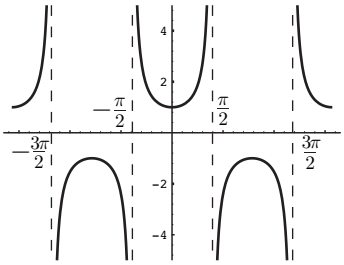
cos x



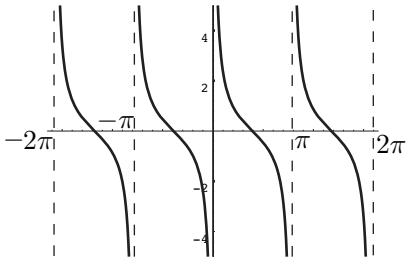
cosec x



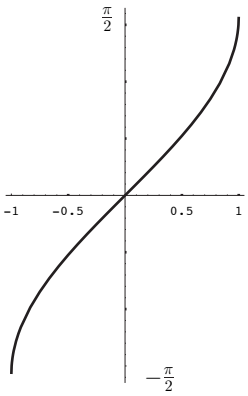
sec x



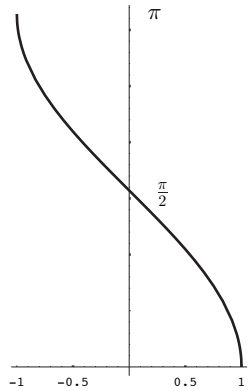
cotg x



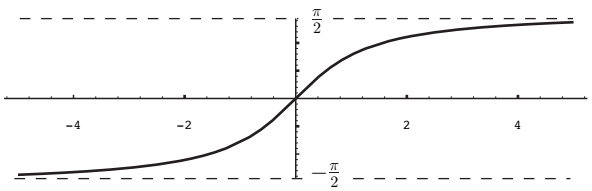
arcsen x



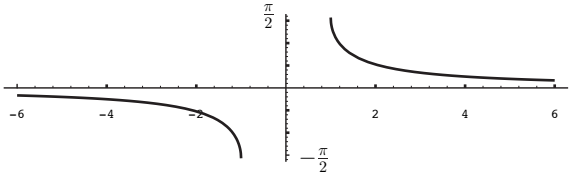
arccos x



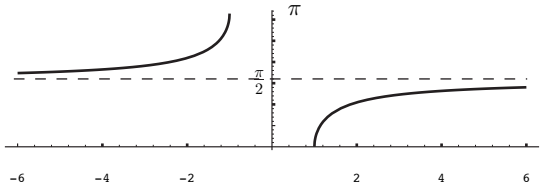
arctg x



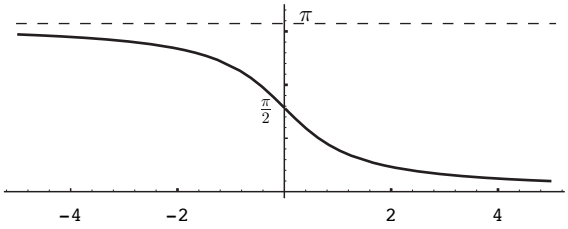
arccosec x

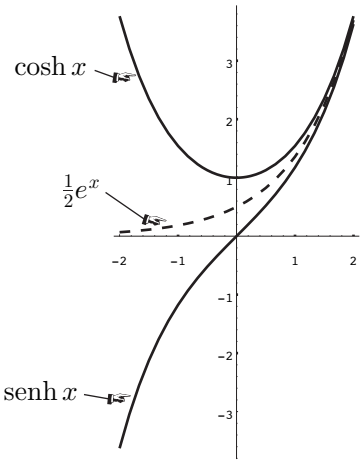


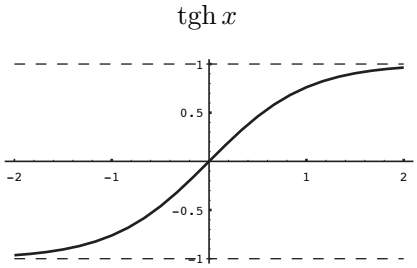
arcsec x

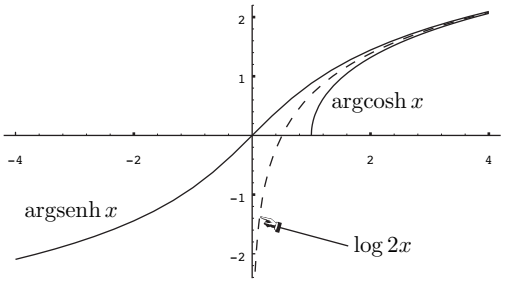


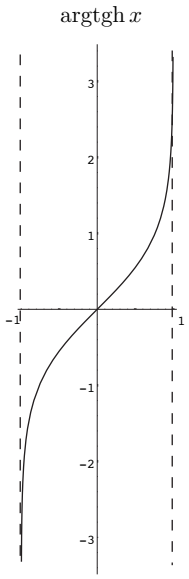
arccotg x

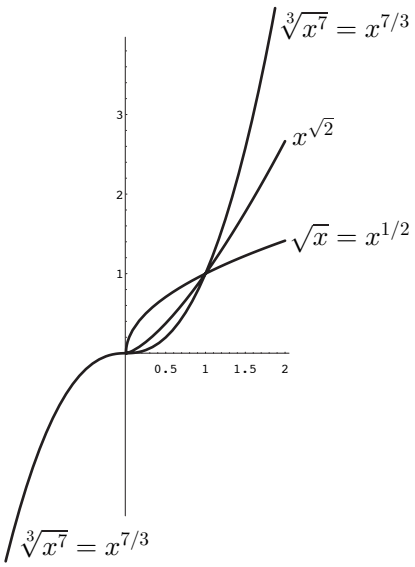



cosh x
$\frac{1}{2}e^x$
senh x

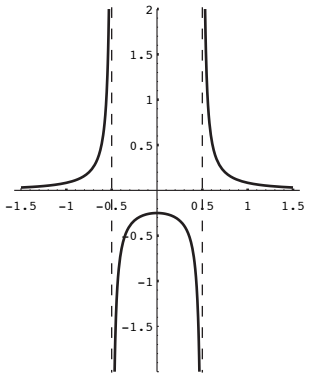

tgh x


argcosh x
argsenh x
$\log 2x$

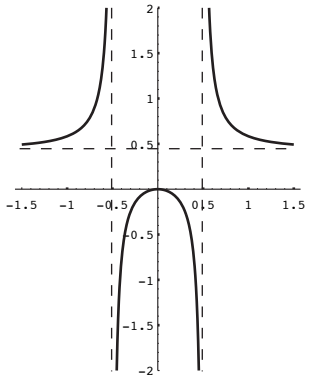

argtgh x


$\sqrt[3]{x^7} = x^{7/3}$
$x^{\sqrt{2}}$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$
$\sqrt[3]{x^7} = x^{7/3}$

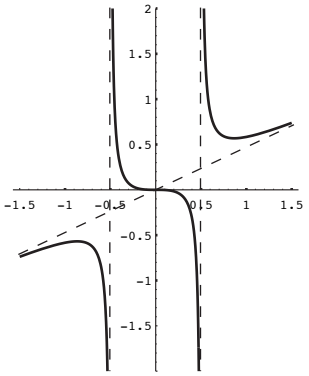
$$\frac{1}{4(2x-1)(2x+1)}$$



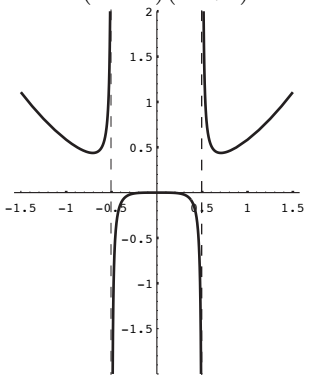
$$\frac{7x^2}{4(2x-1)(2x+1)}$$



$$\frac{7x^3}{4(2x-1)(2x+1)}$$



$$\frac{7x^4}{4(2x-1)(2x+1)}$$



Ejercicios básicos

1. Determine los intervalos de creciemiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad de la función $f(x) = x^3 + 2x^2$; representa gráficamente f.

2. Represente gráficamente las funciones $\operatorname{senh} x$, $\cosh x$ y $\operatorname{tgh} x$.

3. El objetivo de este ejercicio es representar gráficamente la función

$$f(x) = \frac{x^3}{(2x-1)(2x+1)}$$

   a) Determine el dominio de la función y los puntos de corte con el eje OX.

   b) Derive la función y determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos.

   c) Halle las posibles asíntotas:

   - Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ tiene una asíntota horizontal.
   - Si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ tiene una asíntota vertical.
   - Si $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}$ y $n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) \in \mathbb{R}$, entonces $y = mx + n$ es una asíntota oblícua en $+\infty$.

4. Consideremos la recta $2x - 3y + 1 = 0$. Transforme su ecuación en ecuaciones paramétricas y en su forma *explícita*. Construya los tres tipos de ecuaciones (cartesiana, paramétricas y explícita) para la recta perpendicular a la recta anterior y que pasa por el punto $(1, -1)$.

5. Defina una parametrización del segmento que une los puntos $(-2, -1)$ y $(3, 0)$ usando el intervalo $[0, 1]$. Defina otra parametrización del mismo segmento en el intervalo $[-1, 1]$.

6. El objetivo de este ejercicio es dibujar la curva $X = \frac{3t}{1+t^3}$, $Y = \frac{3t^2}{1+t^3}$, $t \in [0, \infty)$:

   a) Represente gráficamente las funciones $x(t) = \frac{3t}{1+t^3}$ e $y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}$ en el intervalo $t \in [0, \infty)$. (Necesitará evaluar los límites $\lim_{t\to\infty} \frac{3t}{1+t^3}$ y $\lim_{t\to\infty} \frac{3t^2}{1+t^3}$.)

b) Calcule los vectores derivada en $t = 0$ y $t \to \infty$.

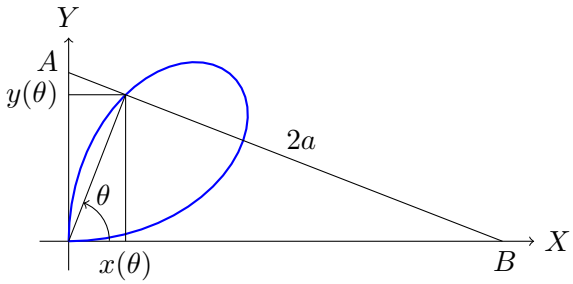
c) Utilice la información obtenida en los apartados anteriores para dibujar la curva.

7. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $x = 2t$, $y = t^2 - 1$ en $t = 2$.

8. Localice todos los puntos de la curva $x = 1 - t$, $y = t^3 - 3t$, si los hay, en los que la tangente sea horizontal o vertical.

9. Dibuje la curva polar $r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$, $\theta \in (0, 2\pi)$. Halle la ecuación de la recta tangente a esta curva para $\theta = \frac{\pi}{3}$.

10. Un segmento AB de longitud constante $2a$ se desliza con sus extremos por los ejes de coordenadas. Desde el origen de coordenadas se traza una perpendicular a AB que corta al segmento en el punto M. Describa como curva polar a los puntos M.



11. Lea la sección 3.1.2 y verifique que la recta $X = -1$ es una asíntota de la curva polar $r = 2 - \sec\theta$.

LECCIÓN 3.2

Cónicas

Una forma alternativa de describir *lugares geométricos* del plano es mediante *ecuaciones cartesianas*. Si $P(x, y)$ es cualquier expresión en la que aparecen involucradas las variables x e y, la igualdad $P(x, y) = 0$ se denomina ecuación cartesiana del siguiente conjunto de puntos:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x, y) = 0\}$$

Dependiendo de la expresión, este conjunto puede ser vacío, contener un único punto o un conjunto finito de puntos, describir una o varias rectas, una o varias curvas e incluso una región del plano. Para abreviar, diremos simplemente "consideremos la región $P(x, y) = 0$" en lugar de "consideremos la región $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x, y) = 0\}$".

Ejemplo 3.2.1 Si $P(x, y)$ es un polinomio de grado uno en x e y, entonces $P(x, y) = 0$ es una recta. Por ejemplo, $x - 2y - 3 = 0$ describe una recta, de la cual sabemos que el vector $(1, -2)$ es un vector perpendicular a ella, es decir, $(2, 1)$ es un vector director; sustituyendo x por un valor cualquiera, obtenemos un punto de la recta: para $x = 0$, $-2y - 3 = 0$, es decir, $(0, -3/2)$ es un punto de la recta. A partir de aquí, deducimos fácilmente una parametrización:

$$(X, Y) = \left(0, -\frac{3}{2}\right) + t(2, 1) = \left(2t, t - \frac{3}{2}\right)$$ ——

En esta lección, nos vamos a centrar en las ecuaciones cartesianas definidas por un polinomio de grado dos en las variables x e y:

$$P(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{3.2}$$

Para que el polinomio en (3.2) tenga grado 2, necesariamente al menos uno de los coeficientes a, b o c tiene que ser distinto de cero; en tal caso, el lugar geométrico es una curva y se denomina *cónica*. También están incluidos algunos lugares geométricos que visualmente no son curvas propiamente dichas y que se denominan *cónicas degeneradas*; en el siguiente ejemplo mostramos ejemplos sencillos de este tipo de cónicas.

Ejemplo 3.2.2

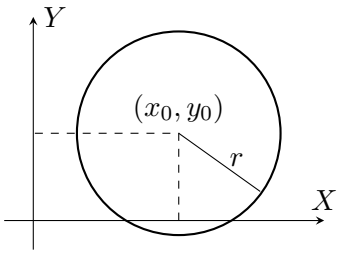
1. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 + 1 = 0\} = \varnothing$
2. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 0\} = (0, 0)$
3. $\{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 0\}$ está formado por las rectas $x + y = 0$ y $x - y = 0$.

——

Aparte de los tres casos del ejemplo anterior, si el polinomio tiene grado dos, la ecuación (3.2) puede definir una de las cuatro curvas que presentamos en los apartados siguientes.

Circunferencia. El lugar geométrico de los puntos cuya distancia a un punto fijo $C = (x_0, y_0)$ es constantemente $r > 0$, se denomina *circunferencia de centro C y radio r* y su ecuación cartesiana es:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$



La circunferencia es un caso particular de elipse, que definimos en el ítem siguiente, aunque por su importancia, la destacamos como un tipo distinto.

Ejemplo 3.2.3 La ecuación $x^2+y^2 = 4$ determina una circunferencia centrada en el origen y de radio 2. Si con el mismo radio, queremos que esté centrada en $(-1, 2)$, la ecuación será:

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$$ ____

Observamos en este ejemplo que, al desarrollar los cuadrados, el polinomio no tiene término en xy; de hecho, podemos caracterizar a las circunferencias como sigue: *si $b = 0$ y $a = c$, entonces la ecuación 3.2 representa una circunferencia o una cónica degenerada*. Para deducir si es degenerada u obtener el centro y el radio de la circunferencia, basta con aplicar la técnica de completar cuadrados a los sumandos en x y a los sumandos en y.

Ejemplo 3.2.4 La ecuación $9x^2 + 9y^2 - 36x + 54y - 116 = 0$ corresponde a una circunferencia:

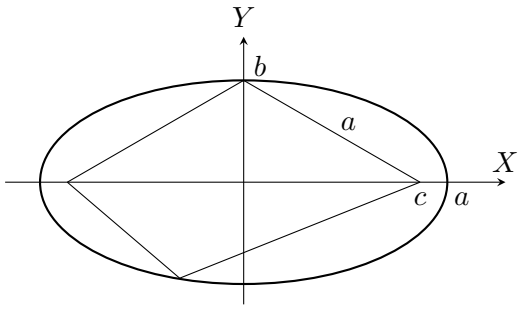
$$0 = 9x^2 + 9y^2 - 36x + 54y - 116 = 9(x - 2)^2 + 9(y + 3)^2 - 1 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = \frac{1}{9}$$

Es decir, su centro es $(2, -3)$ y su radio es $1/3$. ____

Elipse. El lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos F_1 y F_2 es constantemente $2a$ se denomina *elipse de focos F_1 y F_2*

y suma de distancias $2a$. Llamamos *centro* de la elipse al punto medio del segmento que une los dos focos, es decir, $\frac{1}{2}(F_1 + F_2)$. La ecuación más sencilla se obtiene cuando los focos están en los puntos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, con $c > 0$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Obsérvese que el centro es el origen de coordenadas, que se verifica la igualdad fundamental $c^2 + b^2 = a^2$ y que necesariamente $a > b$. Si $b > a$, la ecuación también describe una elipse, pero en ese caso los focos están en $(0, c)$ y $(0, -c)$; finalmente, si $a = b$, la elipse es una circunferencia de radio a.

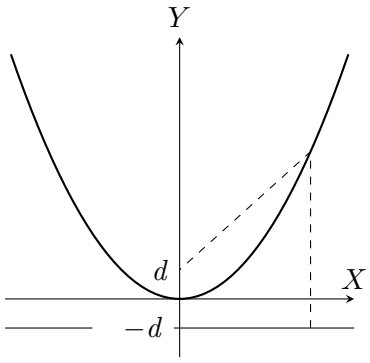
Si desplazamos la elipse para que tenga su centro en (x_0, y_0), la ecuación que obtenemos es

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

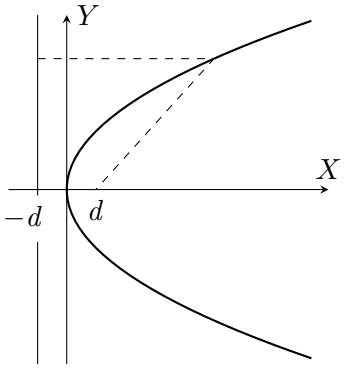
Si desarrollamos los cuadrados, obtendremos un polinomio sin término en xy, aunque en este caso los coeficientes de x^2 e y^2 son distintos pero con el mismo signo.

Parábola. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta r y un punto F, se denomina *parábola con foco F y directriz r*. En la figura que aparece abajo, mostramos dos ejemplos de parábolas; si el foco es el punto $(0, d)$ y la directriz es $Y = -d$, obtenemos la parábola de la izquierda; si el foco es el punto $(d, 0)$ y la directriz es $X = -d$, obtenemos la parábola de la derecha:

$x^2 = 4dy$



$y^2 = 4dx$



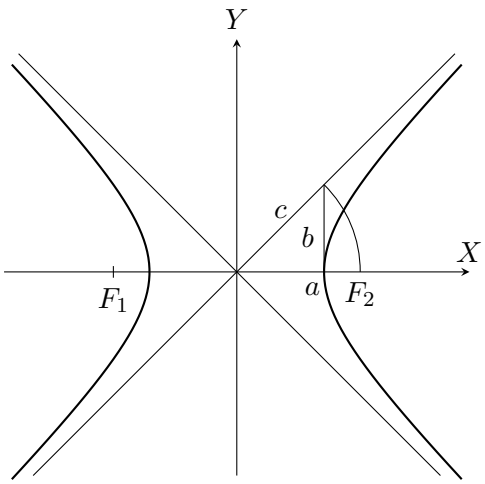
Si desplazamos estas parábolas para que tengan su vértice en (x_0, y_0), las ecuaciones que obtenemos son:

$$(x - x_0)^2 = 4d(y - y_0), \qquad (y - y_0)^2 = 4d(x - x_0)$$

Al desarrollar estas ecuaciones obtenemos polinomios en los que no hay término en xy y falta, o bien el término en x^2, o bien el término en y^2.

Hipérbola. El lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos F_1 y F_2 es constantemente $2a$ se denomina *hipérbola con focos F_1 y F_2 y diferencia de distancias* $2a$. Llamamos *centro* de la hipérbola al punto medio del segmento que une los dos focos, es decir, $\frac{1}{2}(F_1 + F_2)$. Si los focos están en los puntos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, con $c > 0$, la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$



en donde $a^2 + b^2 = c^2$. Como se observa en la figura, las rectas $bx - ay = 0$ y $bx + ay = 0$ están muy próximas a la curva pero no la cortan; estas rectas se denominan *asíntotas* de la hipérbola.

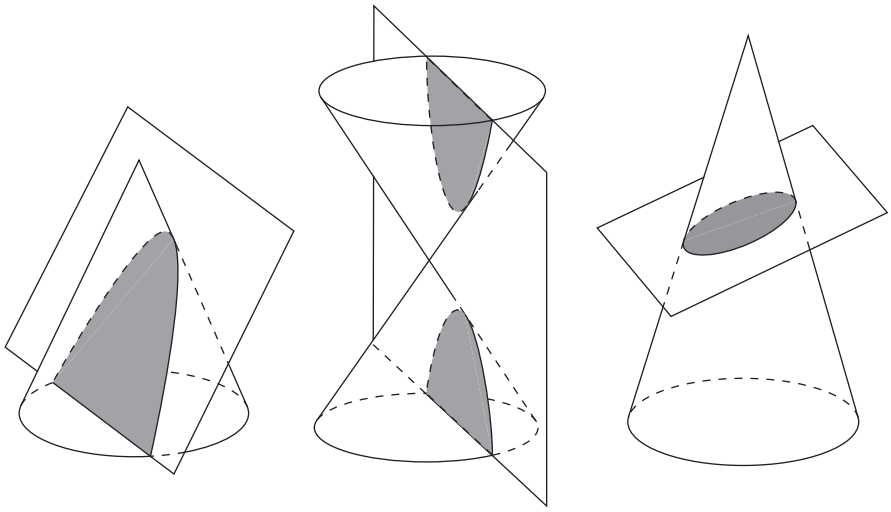
Si desplazamos la hipérbola para que tenga su centro en (x_0, y_0), la ecuación que obtenemos es

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Si desarrollamos los cuadrados, obtendremos un polinomio sin término en xy, los coeficientes de x^2 e y^2 son distintos y tienen distinto signo.

En los ejemplos mostrados en las definiciones anteriores, hemos mantenido las curvas en su *posición típica*, es decir, con sus ejes paralelos a los ejes de coordenadas. Sin embargo, un polinomio general determinará una cónica situada en cualquier parte del plano y con los ejes posiblemente girados respecto de los ejes de coordenadas. El objetivo de la sección siguiente es reconocer cuál es la cónica definida por un polinomio arbitrario.

Otra forma de obtener estas curvas es mediante la siguiente descripción. Si consideramos un cono circular hueco y lo cortamos con un plano, la curva resultante en la sección es una *cónica* y dependiendo del ángulo de corte, se obtiene una u otra.



Parábola Hipérbola Elipse

Si el corte es perpendicular al eje de cono, obtenemos una circunferencia; si el corte es paralelo a la generatriz se obtiene una parábola; si el corte es paralelo al eje se obtiene una hipérbola; cualquier otro corte, produce una elipse.

Naturalmente, también es posible describir una cónica mediante ecuaciones paramétricas. A continuación vemos la parametrizaciones de las cónicas en sus posiciones típicas y en la sección siguiente aprenderemos como parametrizar una cónica arbitraria.

Circunferencia con centro (x_0, y_0) y radio r:

$$\begin{cases} X = x_0 + r\cos\theta \\ Y = y_0 + r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Elipse centrada en (x_0, y_0) y semiejes a y b:

$$\begin{cases} X = x_0 + a\cos\theta \\ Y = y_0 + b\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Parábolas con vértices en (x_0, y_0) y ejes paralelos OY y OX respectivamente:

$$\begin{cases} X = x_0 + t \\ Y = y_0 + \dfrac{t^2}{4d} \\ t \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \begin{cases} X = x_0 + \dfrac{t^2}{4d} \\ Y = y_0 + t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Hipérbola centrada (x_0, y_0) y con asíntotas paralelas a las rectas $bx + ay = 0$ y $bx - ay = 0$:

$$\begin{cases} X = x_0 + a\cosh t \\ Y = y_0 + b\,\mathrm{senh}\, t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \begin{cases} X = x_0 - a\cosh t \\ Y = y_0 + b\,\mathrm{senh}\, t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

En este caso, necesitamos una parametrización distinta para cada rama de la hipérbola.

3.2.1. Clasificación de polinomios

Nuestro objetivo en esta sección es aprender a deducir cuál es la cónica definida por la ecuación

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

y determinar las características necesarias para poder dibujarla en el plano.

En primer lugar, vamos a agrupar y a poner nombre a los sumandos del polinomio:

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 &\rightarrow \text{parte cuadrática} \\ dx + ey &\rightarrow \text{parte lineal} \\ f &\rightarrow \text{término independiente} \end{aligned}$$

Los polinomios que solo tienen parte cuadrática se denominan *formas cuadráticas* y nos aparecerán más veces a lo largo del curso. Esta parte cuadrática caracteriza el tipo de cónica que representa y la única operación que vamos a realizar para determinarla, es la *compleción de cuadrados* que aprendimos en el primer tema. Usando esa técnica conseguimos fácilmente transformar una forma cuadrática en una de las siguientes formas:

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 &= A(x + By)^2 + Cy^2 \\ ax^2 + bxy + cy^2 &= A(y + Bx)^2 + Cx^2 \end{aligned}$$

A partir de aquí, basta con analizar las constantes A y C para saber cual es la curva:

TEOREMA 3.2.1 *Consideremos la cónica*

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

y supongamos que su parte cuadrática ha sido transformada en una de las siguientes formas

$$ax^2 + bxy + cy^2 = A(x + By)^2 + Cy^2$$
$$ax^2 + bxy + cy^2 = A(y + Bx)^2 + Cx^2$$

Si la cónica no es degenerada, entonces:

1. *Si A y C son no nulos y tienen el mismo signo, la curva es una elipse.*
2. *Si A y C son no nulos pero tienen signos opuestos, la curva es una hipérbola.*
3. *Si $A = 0$ ó $C = 0$, la curva es una parábola.*

EJEMPLO 3.2.5 Vamos a clasificar algunas cónicas:

1. $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 4y - 1 = 0$ es una parábola, ya que

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

2. $9x^2 + 4xy + 6y^2 - 14x + 8y + 10 = 0$ es una elipse, ya que

$$\begin{aligned} 9x^2 + 4xy + 6y^2 &= 9(x^2 + \frac{4}{9}xy) + 6y^2 = \\ &= 9(x + \frac{2}{9}y)^2 - 9\frac{4}{81}y^2 + 6y^2 = 9(x + \frac{2}{9}y)^2 + \frac{50}{9}y^2 \end{aligned}$$

3. $2xy - x + 1 = 0$ es una hipérbola: dado que la parte cuadrática no tiene términos ni en x^2 ni en y^2, hacemos un cambio de variable antes de empezar a completar cuadrados: $y = x + u$.

$$\begin{aligned} 2xy &= 2x(x + u) = 2x^2 + 2xu \\ &= 2(x + \frac{1}{2}u)^2 - \frac{1}{2}u^2 \\ &= 2(x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x)^2 - \frac{1}{2}(y - x)^2 \\ &= 2(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)^2 - \frac{1}{2}(y - x)^2 \end{aligned}$$

——

A continuación, analizamos cada tipo de cónica para determinar las características que nos ayudan a identificarlas y dibujarlas.

3.2.1.1. Parábolas

Atendiendo al teorema 3.2.1, las parábolas responden a la siguiente ecuación cartesiana:

$$(ax+by)^2+cx+dy+e=0$$

En el teorema siguiente se establece como determinar las características de esta parábola: eje, tangente al vértice, vértice y apertura.

TEOREMA 3.2.2 *Los polinomios de la forma*

$$(ax+by)^2+cx+dy+e=0$$

tienen las siguientes características.

1. *Existen números reales A, B y C tales que:*

$$(ax+by)^2+cx+dy+e=(ax+by+A)^2+B(bx-ay+C) \quad (3.3)$$

2. *Si $B=0$, es una cónica degenerada, concretamente la recta $ax+by+A=0$.*

3. *Si $B\neq 0$, la curva correspondiente es una parábola: la recta $ax+by+A=0$ es su eje y la recta $bx-ay+C=0$ es la tangente a su vértice. El vértice queda determinado por la intersección de estas dos rectas.*

4. *Si $B<0$ la apertura de parábola está en la dirección y sentido del vector $(b,-a)$ y si $B>0$, en el sentido opuesto.*

5. *Si $B\neq 0$, la parábola (3.3) se puede parametrizar de la siguiente forma:*

$$ax(t)+by(t)+A=t$$
$$bx(t)-ay(t)+C=-\frac{t^2}{B}$$

Los números reales cuya existencia se menciona en el teorema anterior, se calcularán desarrollando las expresiones e identificando los coeficientes de los polinomios. Por otra parte, obsérvese que siempre es fácil despejar $x(t)$ e $y(t)$ en la parametrización descrita en el teorema anterior, tratando las ecuaciones como un sistema de ecuaciones linea.

EJEMPLO 3.2.6 En el apartado 1 del ejemplo 3.2.5 hemos visto que $x^2+2xy+y^2+2x-4y-1=0$ es una parábola que se puede escribir como:

$$(x+y)^2+2x-4y-1=0$$

Por el teorema 3.2.2, existen números reales A, B y C tales que:

$$x^2+2xy+y^2+2x-4y-1=(x+y+A)^2+B(x-y+C)=$$
$$=x^2+2xy+y^2+(2A+B)x+(2A-B)y+(A^2+BC)$$

Identificando coeficientes, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2A+B=2 \\ 2A-B=-4 \\ A^2+BC=-1 \end{cases}$$

Su única solución es $A=-1/2$, $B=3$ y $C=-5/12$, y por lo tanto, la ecuación de la parábola queda:

$$(x+y-\frac{1}{2})^2+3(x-y-\frac{5}{12})=0 \tag{3.4}$$

La recta $x+y-\frac{1}{2}=0$ es el eje de la parábola y $x-y-\frac{5}{12}=0$ es la recta tangente al vértice; su vértice es el punto $(11/24, 1/24)$ que se obtiene resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x+y-\frac{1}{2} &= 0 \\ x-y-\frac{5}{12} &= 0 \end{cases}$$

Mirando la parte lineal de la ecuación (3.4), deducimos la dirección y el sentido de la apertura de la parábola:

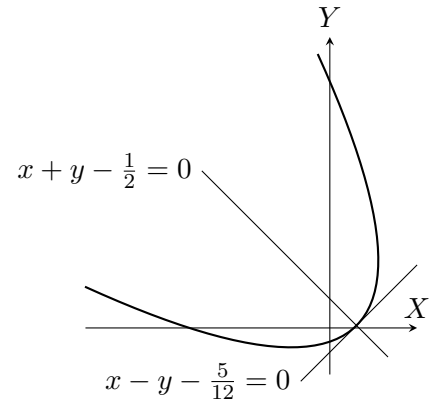
$$\begin{array}{ccc} +3 & (\quad x & -y \quad -\frac{5}{12}) \\ \downarrow & \quad \downarrow & \downarrow \\ \text{sentido opuesto a} & (\quad 1, & -1 \quad) \end{array} \tag{3.5}$$

Para obtener la parametrización de la parábola, planteamos las igualdades

$$\begin{aligned} x+y-\tfrac{1}{2} &= t \\ x-y-\tfrac{5}{12} &= -\tfrac{t^2}{3} \end{aligned}$$

y despejamos x e y en función de t:

$$\begin{cases} X=-\frac{1}{6}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{11}{24} \\ Y=\frac{1}{6}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{24} \\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$$



3.2.1.2. Elipses e hipérbolas

El estudio necesario para identificar una elipse es idéntico al necesario para identificar una hipérbola, y por eso las estudiamos conjuntamente. De hecho, recordemos que, en su posición típica, las dos curvas responden a la siguiente ecuación:

$$Ax^2 + By^2 = 1$$

Si A y B son estrictamente positivos, la ecuación corresponde a una elipse y si tienen signos opuestos, a una hipérbola.

El siguiente teorema nos dice como determinar los ejes y el centro de este tipo de cónicas.

TEOREMA 3.2.3 *Si la parte cuadrática de la ecuación*

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \tag{3.6}$$

la clasifica como elipse o hipérbola, entonces:

1. *Las pendientes, λ, de sus ejes son las soluciones de la ecuación*

$$b\lambda^2 + 2(a - c)\lambda - b = 0$$

2. *Si (v_1, v_2) es un vector director de uno de sus ejes, entonces existen números reales A, B, C, D y E tales que*

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = \\ = A(v_1x + v_2y + B)^2 + C(v_2x - v_1y + D)^2 + E \end{aligned} \tag{3.7}$$

3. *Si $E = 0$, la ecuación se corresponde con una cónica degenerada (puede ser un punto o un par de rectas).*

4. *Si $E \neq 0$, la cónica no es degenerada, las rectas $v_1x + v_2y + B = 0$ y $v_2x - v_1y + D = 0$ son sus ejes y su intersección es su centro.*

EJEMPLO 3.2.7 En el ítem 2 del ejemplo 3.2.5 hemos visto que

$$9x^2 + 4xy + 6y^2 - 14x + 8y + 10 = 0$$

es una elipse. La ecuación que determina las pendientes de los ejes es

$$4\lambda^2 + 6\lambda - 4 = 0,$$

y sus soluciones son $\lambda = -2$ y $\lambda = 1/2$. Por lo tanto, como vectores directores de sus ejes podemos tomar $(1, -2)$ y $(2, 1)$. Por el teorema 3.2.3, existen

números reales A, B, C, D y E tales que

$$\begin{aligned}9x^2+4xy+6y^2-14x+8y+10 &= A(2x+y+B)^2+C(x-2y+D)^2+E= \\ &(4A+C)x^2+(4A-4C)xy+(A+4C)y^2+ \\ &+(4AB+2CD)x+(2AB-4CD)y+AB^2+CD^2+E\end{aligned}$$

Con el sistema siguiente calculamos estas constantes:

$$\begin{cases}4A+C=9\\4A-4C=4\\A+4C=6\\4AB+2CD=-14\\2AB-4CD=8\\AB^2+CD^2+E=10\end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones obtenemos que $A=2$ y $C=1$. Sustituyendo los valores de A y C en la cuarta y quinta ecuación, obtenemos que $8B+2D=-14$ y $4B-4D=8$ y por lo tanto, $B=-1$ y $D=-3$; finalmente, de la última ecuación deducimos que $E=-1$. Obsérvese que no hemos utilizado la tercera ecuación, pero que las soluciones son compatibles con ellas; si esto no ocurriera, nos indicaría que algo hemos hecho mal en los pasos anteriores. Por lo tanto, la ecuación de la elipse se escribe como

$$2(2x+y-1)^2+(x-2y-3)^2=1$$

El centro es la intersección de sus ejes, $2x+y-1=0$, $x-2y-3=0$, es decir, $(x_0,y_0)=(1,-1)$. ——

También podemos determinar fácilmente una parametrización para estas cónicas como sigue. Si el polinomio (3.7) corresponde a una elipse, siendo $A>0$, $C>0$ y $E<0$, entonces las siguientes ecuaciones permiten despejar x e y en función del parámetro t:

$$\begin{aligned}\sqrt{-A/E}(v_1x+v_2y+B)&=\cos t\\ \sqrt{-C/E}(v_2x-v_1y+D)&=\operatorname{sen} t\end{aligned}$$

Si el polinomio (3.7) corresponde a una hipérbola, siendo $A>0$, $C<0$ y $E<0$, entonces las siguientes ecuaciones permiten despejar x e y en función del parámetro t:

$$\begin{aligned}\sqrt{-A/E}(v_1x+v_2y+B)&=\pm\cosh t\\ \sqrt{C/E}(v_2x-v_1y+D)&=\operatorname{senh} t\end{aligned}$$

Obsérvese que en este caso, obtenemos dos parametrizaciones, una para cada rama de hipérbola.

Ejemplo 3.2.8 Siguiendo con el ejemplo anterior en el que hemos obtenido la siguiente ecuación para una elipse:

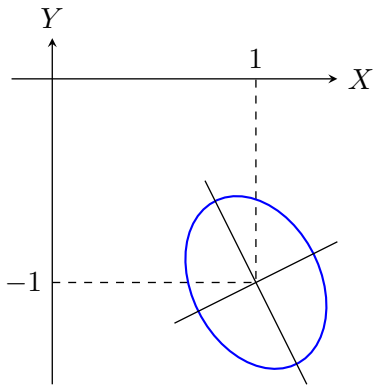
$$2(2x+y-1)^2+(x-2y-3)^2=1,$$

determinamos una parametrización a partir de

$$\sqrt{2}(2x+y-1)=\cos t \qquad\qquad x-2y-3=\operatorname{sen} t$$

Despejando x e y en función de t:

$$\begin{cases} X=\dfrac{\sqrt{2}}{5}\cos t+\dfrac{1}{5}\operatorname{sen} t+1 \\ Y=\dfrac{\sqrt{2}}{10}\cos t-\dfrac{2}{5}\operatorname{sen} t-1 \\ t\in[0,2\pi] \end{cases}$$



Podemos obtener más detalles de la elipse fácilmente. Por ejemplo, el centro de la elipse es el punto de corte de los dos ejes, es decir, la solución del sistema

$$2x+y-1=0, \qquad x-2y-3=0,$$

que es $(1,-1)$. Los vértices de la elipse serán los puntos de corte de los ejes con la elipse; también utilizaremos para ello la forma canónica que hemos obtenido. Por ejemplo, si hacemos $2x+y-1=0$, obtenemos que $(x-2y-3)^2=1$, por lo que los dos puntos de corte son las soluciones de los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} 2x+y-1 &= 0 \\ x-2y-3 &= 1 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} 2x+y-1 &= 0 \\ x-2y-3 &= -1 \end{cases}$$

Análogamente, los puntos de corte con el otro eje son las soluciones de los sistemas:

$$\begin{cases} \sqrt{2}(2x+y-1) &= 1 \\ x-2y-3 &= 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \sqrt{2}(2x+y-1) &= -1 \\ x-2y-3 &= 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, los cuatro vértices son
$(6/5,-7/5)$, $(4/5,-3/5)$, $(1+\sqrt{2}/5,-1+\sqrt{2}/10)$ y $(1-\sqrt{2}/5,-1-\sqrt{2}/10)$.

También podemos obtener los vértices a partir de la parametrización con los valores $t=0$, $t=\pi/2$, $t=\pi$ y $t=3\pi/2$. ——

En el caso en que la ecuación (3.6) corresponda a una hipérbola, también tendremos que determinar sus asíntotas. El siguiente resultado nos da el método para determinarlas.

TEOREMA 3.2.4 *Si* (3.6) *corresponde a una hipérbola y* $c \neq 0$*, entonces las pendiente,* λ*, de sus asíntotas son las soluciones de la ecuación:*

$$c\lambda^2 + b\lambda + a = 0;$$

si $c = 0$ *y* $a \neq 0$*, entonces las pendiente de sus asíntotas son las soluciones de la ecuación:*

$$a\lambda^2 + b\lambda = 0;$$

si $a = 0 = c$*, entonces las asíntotas son paralelas a los ejes de coordenadas.*

EJEMPLO 3.2.9 En el ítem 3 del ejercicio 3.2.5 vimos que $2xy - x + 1 = 0$ es una hipérbola. Con la ecuación $2\lambda^2 - 2 = 0$ determinamos las pendientes de sus ejes, $\lambda = \pm 1$, y deducimos que toman las direcciones $(1, 1)$ y $(1, -1)$, así que podemos obtener la siguiente igualdad:

$$2xy - x + 1 = A(x + y + B)^2 + C(x - y + D)^2 + E$$

Desarrollando la expresión de la derecha e identificando coeficientes llegamos a la siguiente ecuación para la hipérbola:

$$\frac{1}{2}(x - y + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}(x + y - \frac{1}{2})^2 = 1.$$

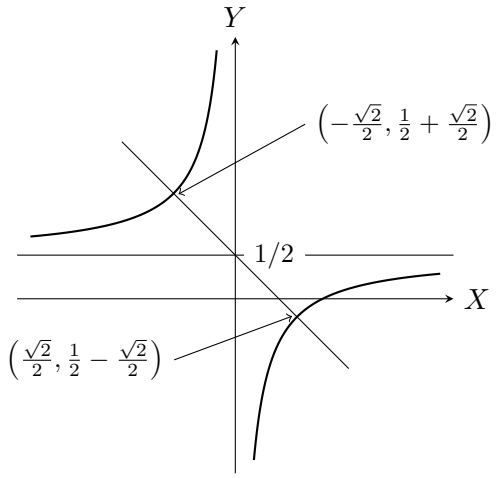
Dado que la ecuación inicial no tiene los términos x^2 e y^2, deducimos que las asíntotas son paralelas a los ejes coordenados. Los dos ejes de una elipse, cortan a la elipse, sin embargo, uno de los ejes de la hipérbola, no la corta. Tenemos por lo tanto que identificar el eje que corta a nuestra hipérbola y hallar estos puntos. Uno de los ejes es $x - y + \frac{1}{2} = 0$ y no corta a la hipérbola:

$$\begin{aligned} x &= y - \frac{1}{2} \\ 2(y - \frac{1}{2})y - (y - \frac{1}{2}) + 1 &= 0 \\ 2y^2 - 2y + \frac{3}{2} &= 0 \\ y &= \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{4} \notin \mathbb{R} \end{aligned}$$

El otro eje es $x + y - \frac{1}{2} = 0$, que sí corta a la hipérbola:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} - y \\ 2(\frac{1}{2} - y)y - (\frac{1}{2} - y) + 1 &= 0 \\ -2y^2 + 2y + \frac{1}{2} &= 0 \\ y_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2},\ y_2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ x_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2},\ x_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

Ya podemos dibujar las curvas:



Para obtener las parametrizaciones, hacemos $\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y+\frac{1}{2}) = \pm\cosh t$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y-\frac{1}{2}) = \operatorname{senh} t$ y deducimos las dos ramas de la hipérbola:

$$\begin{cases} X = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{senh} t + \cosh t) \\ Y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{senh} t - \cosh t) \\ t \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \begin{cases} X = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{senh} t - \cosh t) \\ Y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{senh} t + \cosh t) \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ejercicios básicos

1. Identifique los siguientes lugares geométricos:

$$x^2+y^2-6x+6=0$$
$$x^2+y^2-6x+9=0$$
$$x^2+y^2-6x+10=0$$
$$x^2-3x-2y^2+1=0$$
$$x^2+2x+y^2-2=0$$
$$y^2-3x+y-4=0$$

2. Dibuje la cónica $7x^2-3xy+3y^2+3x-6y+2=0$ y determine una parametrización para ella.

3. Determine una parametrización de la elipse con centro en el punto $(1,0)$, ejes paralelos a los ejes de coordenadas y semiejes $\sqrt{2}$ y 1.

4. Obtenga la ecuación de la parábola con vértice en el punto $(1,1)$, eje en la dirección $(1,2)$, apertura hacia arriba y que pasa por el punto $(2,\frac{3}{2})$.

5. Identifique el lugar geométrico $x^2+6xy+y^2-2x-6y+1=0$.

6. Identifique el lugar geométrico $x^2+6xy+y^2-2x-6y+2=0$ y descríbalo mediante una parametrización.

7. Demuestre que la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ en el punto (x_0,y_0) es $\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1$

8. Según vimos en el tema anterior, los números complejos se representan por puntos del plano. Esto permite especificar lugares geométricos del plano usando ecuaciones con una variable compleja y utilizar funciones definidas sobre el cuerpo de los complejos. En este ejercicio, se pide dibujar los siguientes lugares geométricos definidos de esta forma.

$$\mathrm{Re}(z)=5 \qquad |z-1|=3 \qquad \mathrm{Arg}(z-2)=\frac{\pi}{4} \qquad |\frac{z-1}{z+1}|=3$$

Relación de ejercicios (I)

1. Consideremos la recta $Ax + By + C = 0$ y un punto (x_0, y_0) fuera de la recta. Demuestre que la distancia entre el punto y la recta viene dada por la ecuación:

$$\mathrm{d} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

   Indicación: calcule dicha distancia a partir del producto escalar del vector (A, B), normal a la recta, y un vector $(x - x_0, y - y_0)$ que une un punto de la recta con el punto (x_0, y_0). Aplique la fórmula para calcular:

   a) la distancia del punto $(-4, 3)$ a la recta $x - y = 6$;

   b) la distancia entre las rectas $x + y = 1$ y $2x + 2y = 5$;

   c) la distancia entre las rectas $x - 2y = 15$ y $x - 2y = -3$.

2. Consideramos la curva: $\alpha(t) = \left(\frac{2t^2}{1+t^2}, \frac{2t^3}{1+t^2}\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

   a) Halle: $\lim_{t\to+\infty} \alpha(t)$ y $\lim_{t\to+\infty} \alpha'(t)$.

   b) Dibuje la curva.

   c) ¿Es una parametrización regular? ¿Es una curva regular?

3. En las siguientes curvas, localice todos los puntos, si los hay, en los que la tangente sea horizontal o vertical.

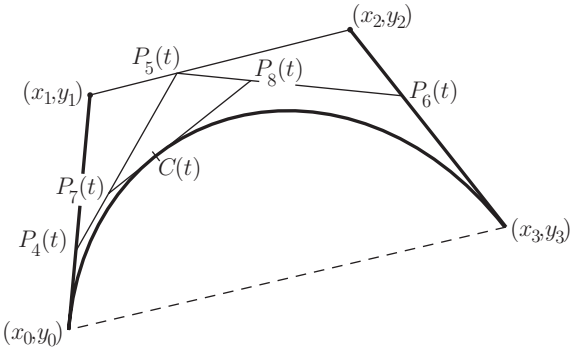
   a) $x = \cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta$

   b) $x = 2\theta + \theta \operatorname{sen}\theta$, $y = 2(1 - \cos\theta)$

   c) $x = \sec\theta$, $y = \tan\theta$

   d) $x = \dfrac{3t}{1+t^3}$, $\qquad y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$

4. *Curvas de Bezier*. Pierre Bezier fue un ingeniero de Renault que durante los años 60 realizó un estudio con el objetivo de mejorar el diseño de componentes. Paralelamente, otro ingeniero de automóviles, perteneciente a la empresa Citroën, llamado Paul de Faget de Casteljau, estaba trabajando sobre el mismo campo. De este último no se llegó a publicar nada en principio, con lo cual Bezier fue el que se llevó los honores y el que da nombre a este tipo de curvas, que son la base de los paquetes de diseño vectorial.



Dados cuatro puntos en el plano, no alineados, $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ y $P_3 = (x_3, y_3)$, se define la curva de Bezier, γ, que une los puntos P_0 y P_3 como sigue. Para cada $t \in [0, 1]$: el punto $P_4(t)$ es el punto del segmento P_0P_1 de tal forma que $\frac{|P_0P_4(t)|}{|P_0P_1|} = t$; el punto $P_5(t)$ es el punto del segmento P_1P_2 de tal forma que $\frac{|P_1P_5(t)|}{|P_1P_2|} = t$; el punto $P_6(t)$ es el punto del segmento P_2P_3 de tal forma que $\frac{|P_2P_6(t)|}{|P_2P_3|} = t$; el punto $P_7(t)$ es el punto del segmento $P_4(t)P_5(t)$ de tal forma que $\frac{|P_4(t)P_7(t)|}{|P_4(t)P_5(t)|} = t$; el punto $P_8(t)$ es el punto del segmento $P_5(t)P_6(t)$ de tal forma que $\frac{|P_5(t)P_8(t)|}{|P_5(t)P_6(t)|} = t$; finalmente, el punto $\gamma(t)$ es el punto del segmento $P_7(t)P_8(t)$ de tal forma que $\frac{|P_7(t)\gamma(t)|}{|P_7(t)P_8(t)|} = t$.

a) Demuestre que:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Pruebe que el segmento P_0P_1 es tangente al punto $\gamma(0) = P_0$ y que el segmento P_2P_3 es tangente al punto $\gamma(1) = P_3$.

c) Determine la curva de Bezier para los puntos $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (2, 3)$, $P_3 = (3, 0)$. Escribirla como $y = f(x)$ y dibujarla.

d) Tres de los puntos pueden estar alineados: determine la curva de Bezier para los puntos $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (2, 2)$, $P_3 = (3, 0)$. Escríbala como $y = f(x)$ y dibújela.

5. Represente por ecuaciones paramétricas la parábola $y^2 + ax + b = 0$ usando como parámetro la pendiente de la recta que une el punto correspondiente con el vértice de la parábola.

6. Demuestre que las ecuaciones:

$$\begin{cases} X = a\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ Y = b\dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

son una parametrización de la elipse $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$. ¿Cómo se desplaza un punto por la curva cuando crece el parámetro t?

7. Dibuje las siguientes curvas dadas en coordenadas polares.

   a) $r = 2a\cos\theta$. Circunferencia.

   b) $r = \dfrac{a}{\cos\theta}$

   c) $r = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\theta}$

   d) $r = \dfrac{16}{5 - 3\cos\theta}$. Elipse.

   e) $r = \dfrac{2}{1-\cos\theta}$. Parábola.

   f) $r = \operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$

   g) $r = a\sqrt{\theta}$. Espiral de Fermat.

   h) $r = \dfrac{a}{\sqrt{\theta}}$. Bastón.

   i) $r = a\theta^2$. Espiral de Galileo.

8. Describa la circunferencia $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ como curva polar.

9. Determine la ecuación de las asíntotas de la curva $r = 2\cos 2\theta \sec\theta$

10. Clasifique la siguiente cónica en función de los parámetros a y b:

$$(1+a)x^2 + 2axy + ay^2 + 2bx + a - 3b^2 = 0$$

11. Halle el centro y radio de las siguientes circunferencias.

    a) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 36$

    b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 3$

    c) $x^2 + y^2 + 8x = 9$

12. Determine el punto de la hipérbola $y = \dfrac{x+9}{x+5}$ cuya tangente en ese punto pasa por el origen de coordenadas.

13. Demuestre que la recta tangente a la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto (x_0, y_0) es $\dfrac{x_0}{a^2}x - \dfrac{y_0}{b^2}y = 1$.

Relación de ejercicios (II)

1. Halle la ecuación de las rectas descritas a continuación:

   a) Pasando por $(-1, 4)$ con pendiente 5

   b) Pasando por $(4, -5)$ y $(-1, 1)$

   c) Pasando por $(-2, 1)$ y paralela a $2x + 3y = 7$

   d) Pasando por $(-3, -1)$ y perpendicular a $x + 4y = 8$

   e) Mediatriz del segmento que une los puntos $(-1, 5)$ y $(3, 11)$

   f) Tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en $(-3, 4)$

2. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva en el valor indicado:

   a) $x = t^2 - t$, $y = t^3 - 3t$ en $t = 2$

   b) $x = 2\operatorname{cotg}\theta$, $y = 2\operatorname{sen}^2\theta$, en $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

3. Dada una curva $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$, llamamos *curvatura* de α en el punto $\alpha(t)$ al número $k(t) = \dfrac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$. Halle la curvatura de la curva $\alpha(t) = (r\cos t, r\operatorname{sen} t)$ en cada punto.

4. El objetivo de este ejercicio es dibujar la curva:

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \qquad y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

   a) Dibuje la curva para $t \in (-\infty, -1)$. Deberá calcular lo límites de la parametrización y de su derivada en $-\infty$ y en -1^-.

   b) Dibuje la curva para $t \in (-1, +\infty)$. Deberá calcular lo límites de la parametrización y de su derivada en -1^+ y en $+\infty$.

   c) Demuestre que la recta $y = -x - 1$ es una asíntota

5. Dibuje las siguientes curvas dadas en coordenadas polares.

   a) $r = a + \dfrac{1}{\theta}$

   b) $r = a\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}$

   c) $r = 1 + \cos\theta$. Cardioide.

   d) $r = 1 + 2\cos\theta$. Caracol de Pascal.

   e) $r = 1 + \dfrac{1}{2}\cos\theta$. Caracol de Pascal.

   f) $r = \sqrt{\cos 2\theta}$

g) $r = 2(1 - \operatorname{sen}\theta)$

h) $r = \operatorname{sen} 3\theta$

i) $r = a \operatorname{sen}\theta$

j) $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$

6. Localice los puntos de tangencia horizontal y vertical, si los hay, de las curvas polares siguientes

   a) $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$

   b) $r = 2\operatorname{cosec}\theta + 3$

   c) $r = a \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta$

7. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $r = \dfrac{6}{2\operatorname{sen}\theta - 3\cos\theta}$ en $\theta = \pi$

8. Clasifique las siguientes cónicas

   a) $2x^2 + y^2 + 2xy - 12x - 4y + 3 = 0$

   b) $x^2 + 3y^2 + 4xy + 4x - 2y - 4 = 0$

   c) $x^2 + y^2 - 2xy + 2y + 1 = 0$

   d) $2x^2 + y^2 - 1 = 2xy - 2x + 2y$

   e) $4x^2 + y^2 + 4xy - y = 0$

9. Encuentre la ecuación de las circunferencias descritas a continuación:

   a) Centro $(3, -4)$, radio $\sqrt{30}$

   b) Con centro en el segundo cuadrante, tangente a los ejes de coordenadas y radio 4.

   c) Con centro en $(2, -3)$ y pasando por el punto $(5, 4)$.

   d) Que tiene el segmento que une $(-1, 2)$ y $(5, -6)$ como diámetro.

   e) Que pasa por los puntos $(1, 0)$, $(3, 4)$ y $(5, 0)$.

10. Dibuje las *parábolas* $y = x^2 - 4x - 5$ e $y^2 - 3x + 1 = 0$, determinando sus focos, sus vértices y directrices.

11. Dibuje las *elipses* $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ y $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y + 31 = 0$ y determine sus focos.

12. Dibuje las *hipérbolas* $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{6} = 1$ y $16y^2 - x^2 + 2x + 64y + 63 = 0$ y determine su focos, vértices y *asíntotas*.

TEMA 4

Campos escalares

Objetivos: Los objetivos fundamentales del tema son: (1) saber calcular y aplicar las propiedades del vector gradiente de un campo escalar; (2) plantear y resolver problemas de optimización de campos escalares.

Prerrequisitos: Conocimientos fundamentales de cálculo en una variable (cálculo básico de límites, continuidad y derivabilidad de funciones reales de variable real), algunos de los cuales se han ido repasando en los temas anteriores. Conocimientos básicos de algebra lineal y geometría.

Contenido:

- Lección 3.1. Continuidad y diferenciabilidad. Definición de campo escalar. Dominio. Grafo de un campo. Superficies y curvas de nivel. Derivadas direccionales y parciales. Vector gradiente. Diferenciabilidad. Derivación implícita. Matriz hessina. Polinomio de Taylor de orden 2.
- Lección 3.2. Optimización no-lineal. Extremos locales: clasificación de puntos críticos. Extremos condicionados: multiplicadores de Lagrange. Extremos absolutos.

Introducción: En el tema anterior hemos trabajado con polinomios de dos variables, es decir, un ejemplo de función definida en el espacio $\mathbb{R}^2$. En este tema vamos a trabajar con funciones más generales y con más variables, es decir, vamos a trabajar con funciones definidas en espacios $\mathbb{R}^m$. Posiblemente, se haya trabajado en estos espacios utilizando su estructura de *espacio vectorial* pero ahora, estamos interesados en establecer las nociones de *continuidad* y *diferenciabilidad* de funciones definidas en ellos.

Para denotar los elementos de $\mathbb{R}^m$ se suele utilizar una variable con un flecha encima, $\vec{x}$, o bien variables en "negrita", $\boldsymbol{x}$; a lo largo del curso utiliza-

remos esta segunda notación, ya que los elementos de $\mathbb{R}^m$ pueden identificarse tanto con vectores como con puntos. Además, escribiremos las coordenadas de los vectores utilizando subíndices: $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$.

En general, cualquier función definida en un subconjunto de un espacio $\mathbb{R}^m$ se denomina *función de varias variables*. Si la imagen está contenida en $\mathbb{R}$ se denomina *campo escalar*,

$$f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}.$$

Si la imagen está contenida en $\mathbb{R}^k$ se denomina *campo vectorial*,

$$f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k.$$

En este tema, nos centramos en los campos escalares, y más adelante en el curso trabajaremos con campos vectoriales. En cualquiera de los dos casos, el conjunto D se denomina *dominio* del campo y se denota $\mathrm{Dom}(f)$. Algunos problemas exigirán trabajar en un dominio determinado y en tal caso tendrá que ser especificado; en caso contrario, entenderemos que el dominio es el mayor posible.

Ejemplo 4.0.10 La expresión $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x - y}}$ define una campo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. El mayor dominio con el podemos trabajar es el formado por los puntos tales que $x > y$, es decir:

$$\mathrm{Dom}(f) = \{(x, y) \mid x > y\}$$

Gráficamente, los puntos del dominio son los que están estrictamente por debajo de la bisectriz del primer y tercer cuadrante del plano $\mathbb{R}^2$. ——

Sabemos que la representación gráfica de las funciones reales de una variable es una herramienta muy útil para describir sus características, sin embargo, en campos escalares solo podremos utilizar esta herramienta en unos pocos casos. Por una parte, podemos definir el grafo de un campo escalar como

$$\mathrm{gr}(f) = \{(x_1, \ldots, x_m, f(x_1, \ldots, x_m)) \in \mathbb{R}^{m+1}; (x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{Dom}(f)\},$$

aunque solamente podremos visualizar este conjunto para $m = 2$, ya que en tal caso, este conjunto es una superficie de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 4.0.11 El campo escalar definido por $f(x, y) = x^2 + y^2$ tiene por dominio a todo el espacio $\mathbb{R}^2$. Su grafo es el conjunto:

$$\mathrm{gr}(f) = \{(x, y, x^2 + y^2) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

No es difícil imaginar cuál es la forma de esta superficie si observamos que, haciendo constantes la coordenada z de cada punto, $x^2+y^2 = c$, las curvas que obtenemos son circunferencias y si cortamos por cualquier plano que contenga al eje OZ, es deicr, $y = mx$, las curvas que obtenemos son parábolas. Es decir, la superficie es la figura de revolución que se obtiene al girar una parábola sobre su eje. Esta superficie es la que nos encontramos, por ejemplo, en las antenas parabólicas. ——

Otra forma de representar los campos escalares es a través de las *superficies* y *curvas de nivel*: si $c \in \mathrm{Im}(f)$, llamamos *superficie de nivel* de f asociada a c, al conjunto

$$N(f, c) = \{\boldsymbol{x} \in D \mid f(\boldsymbol{x}) = c\};$$

si $m = 2$ estos conjuntos se denominan *curvas de nivel*.[1]

Ejemplo 4.0.12 En el campo $f(x, y) = x^2 + y^2$, las curvas de nivel serían:

$$x^2 + y^2 = c, \quad c > 0$$

Sabemos del tema anterior que estas curvas son circunferencias centradas en el origen y radio $\sqrt{c}$.

El campo $g(x, y) = \mathrm{senh}(x^2 + y^2)$ tiene las mismas curvas de nivel, circunferencias centradas en el origen:

$$\begin{aligned} \mathrm{senh}(x^2 + y^2) &= c \\ x^2 + y^2 &= \mathrm{argsenh}\, c \end{aligned}$$

Sin embargo, para cada valor c, su radio es $\sqrt{\mathrm{argsenh}\, c}$. ——

Para poder visualizar los campos usando sus curvas nivel se hace la representación de la siguiente forma: elegimos varios valores equidistantes, c_1, c_2,..., c_n, y dibujamos las curvas correspondientes a estos valores, $f(\boldsymbol{x}) = c_i$. Por ejemplo, aunque los dos campos del ejemplo 4.0.12 tienen las mismas curvas de nivel, su representación sería distinta, ya que para los mismos valores c_i, las circunferencias correspondientes a dichos valores, son distintas.

Podemos encontrar representaciones de campos mediante curvas de nivel en los mapas de temperaturas y de presiones; en estos casos, las curvas de nivel se denominan isotermas e isobaras respectivamente. En las figuras 4.1 y 4.2 vemos algunos ejemplos de campos escalares y sus representaciones haciendo uso del grafo y de curvas de nivel.

[1] Como hemos visto en el tema anterior, los conjuntos descritos como $f(x, y) = 0$ no tienen que ser necesariamente curvas; este conjunto puede ser vacío, contener uno o varios puntos, una o varias rectas o curvas e incluso estar formado por regiones.

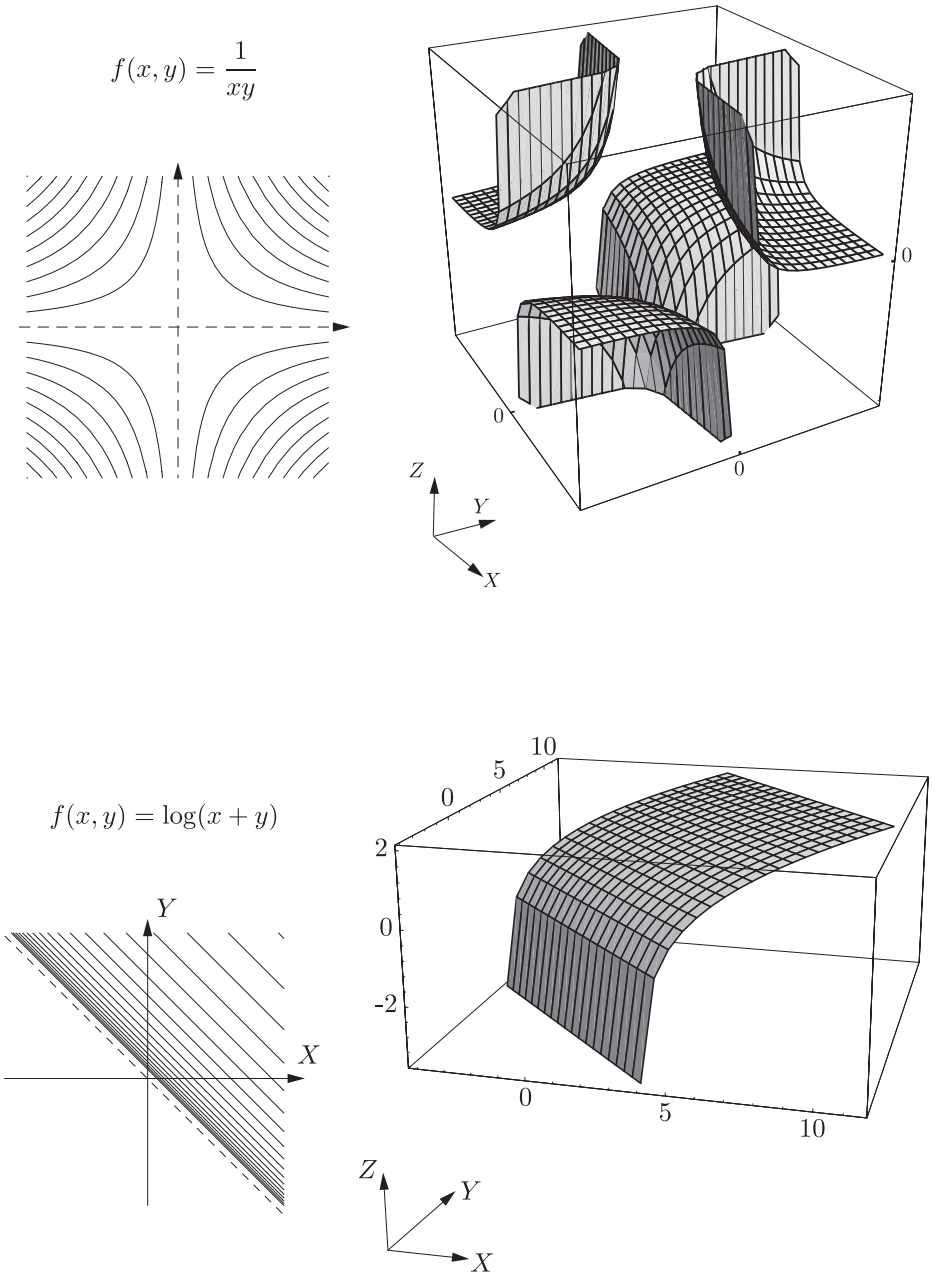


Figura 4.1: Representación de campos escalares

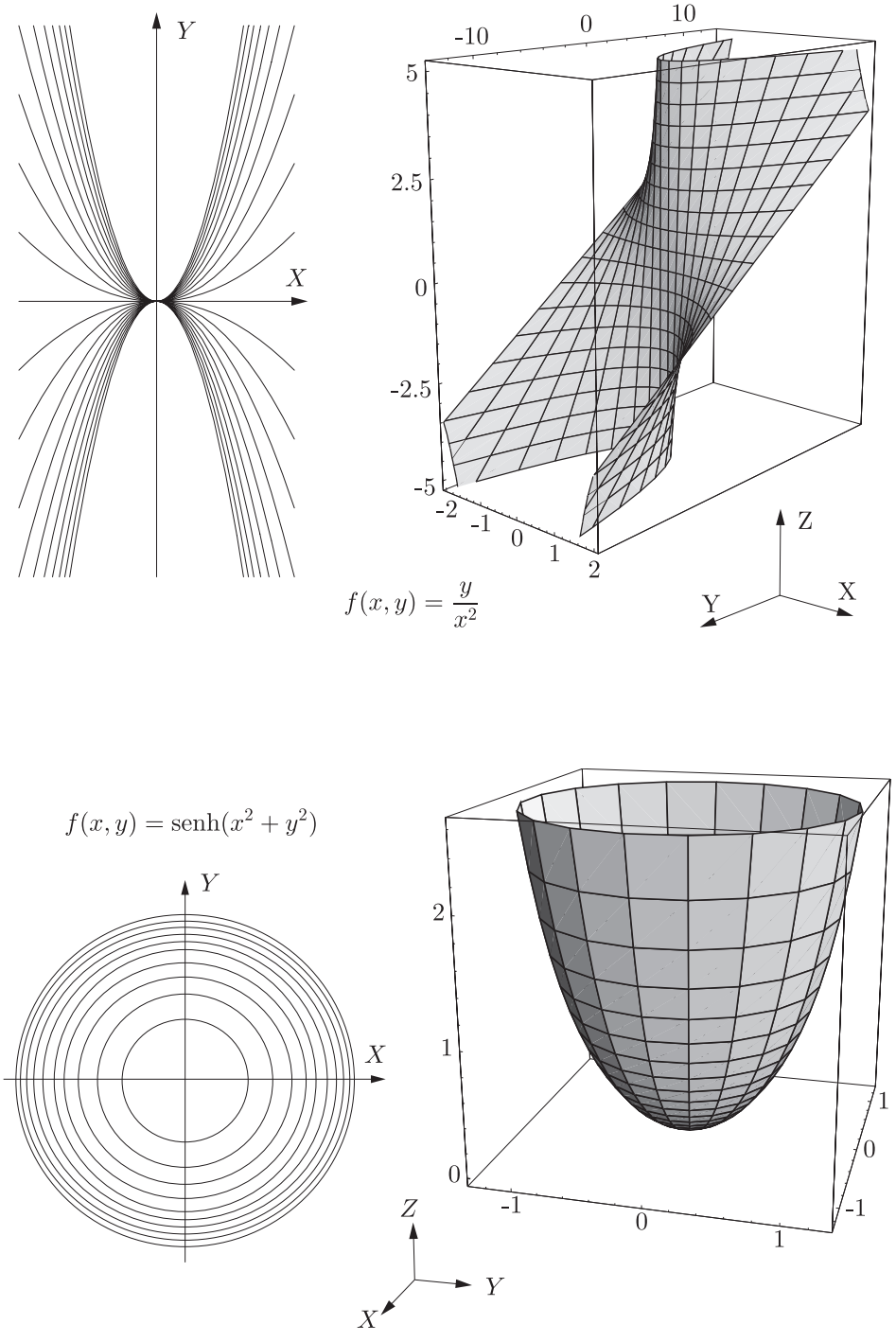


Figura 4.2: Representación de campos escalares

LECCIÓN 4.1
Continuidad y diferenciabilidad

De manera intuitiva, el límite de una función de una variable en un punto a es *el valor que debería tomar la función en ese punto deducido a partir de lo que ocurre a su alrededor*; de esta forma, una función es continua en el punto si el valor en él coincide con el valor previsto.

Naturalmente, la noción de límite y de continuidad pueden ser introducidas para funciones de varias variables para lograr formalizar la misma idea intuitiva. Concretamente, en la definición siguiente utilizamos sucesiones para determinar lo que ocurre alrededor del punto, de forma que el valor previsible es el límite de la sucesión obtenida al evaluar la función sobre cada uno de los elementos.

DEFINICIÓN 4.1.1 *Sea* $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *y* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^m$. *Si para toda sucesión de puntos* $\{\boldsymbol{v}_n\} \subset D$ *con* $\boldsymbol{v}_n \neq \boldsymbol{a}$ *y* $\lim \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{a}$ *se tiene que* $\lim f(\boldsymbol{v}_n) = \ell$, *entonces decimos que* ℓ *es el* límite de f cuando $\boldsymbol{x}$ tiende a $\boldsymbol{a}$.

En esta definición, utilizamos límites de sucesiones de puntos de $\mathbb{R}^m$; dichos límites se calculan por componentes, y por lo tanto, no necesitamos una teoría específica para su estudio. Por ejemplo,

$$\lim \Big(\frac{1}{n}, \frac{n}{n-1}\Big) = (0, 1)$$

Por otra parte, debemos tener en cuenta que, para que la definición tenga sentido en un punto $\boldsymbol{a}$, debe existir alguna sucesión contenida en el dominio y cuyo límite sea $\boldsymbol{a}$; a estos puntos, los denominamos *puntos de acumulación* de D y pueden ser puntos no pertenecientes al conjunto.

Finalmente, también observamos que, con esta definición, "reducimos" el estudio de la continuidad de una función al análisis de límites de sucesiones de números reales, lo que a su vez, permite aplicar a campos escalares la teoría de límites de sucesiones y de funciones de una variable.

EJEMPLO 4.1.1 Consideramos el campo $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$ y $\boldsymbol{a} = (1, 2)$. Para construir una sucesión que se acerque a $(1, 2)$ basta tomar dos sucesiones x_n e y_n tales que $\lim x_n = 1$ y $\lim y_n = 2$; entonces:

$$\lim f(x_n, y_n) = \lim \frac{x_n y_n^2}{x_n^2 + y_n^2} = \frac{1 \cdot 2^2}{1^2 + 2^2} = \frac{4}{5}$$

Dado que este límite no depende de las sucesiones x_n e y_n, deducimos que

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = \frac{4}{5}$$

No obstante, el problema más difícil relacionado con los límites de campos escalares es probar que un determinado límite no existe. El simple estudio de límites laterales que hacemos para funciones de una variable, se complica cuando tratamos con campos escalares. Este tipo de problemas queda fuera de los objetivos planteados para este curso, en el que solamente trabajaremos con funciones a las que se les puede aplicar el siguiente resultado, que se basa en las propiedades algebraicas de los límites.

COROLARIO 4.1.2 *Si un campo escalar está determinado por operaciones algebraicas entre funciones elementales (polinomios, exponenciales, trigonométricas,...) en un dominio D, entonces el campo es continuo en dicho dominio.*

Gráficamente, la propiedad de continuidad de un campo se traduce en la continuidad de su grafo, es decir, este no presentará ni agujeros ni rupturas.

4.1.1. Campos escalares lineales

Dedicamos esta sección a un ejemplo de campo escalar: los *campos escalares lineales*. Estas aplicaciones serán la base para las definiciones y desarrollos asociados al concepto de diferenciabilidad.

Los *campos escalares lineales* en $\mathbb{R}^n$ responden a la expresión:

$$f(x_1,\dots,x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$$

en donde a_1,...,a_n son números reales. La expresión $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ se denomina igualmente *forma lineal* y es un polinomio de grado 1 sin término independiente.

Estos campos se pueden escribir de varias formas. Por ejemplo, en forma matricial se definen a partir de la matriz $A = (a_1 \cdots a_n) \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$:

$$f(x_1,\dots,x_n) = (a_1 \cdots a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\boldsymbol{x}$$

Obsérvese que, aunque anteriormente hemos representado los vectores como $(x_1,\dots,x_n)$, cuando trabajamos matricialmente, los vectores deben tratarse como matrices columna:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$$

Para los objetivos de este tema y para los cálculos que realizaremos en él, es más adecuado, sin embargo, definir los campos escalares lineales usando el *producto escalar*; en este caso, el campo escalar lineal se define con el vector $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}$$

No obstante, no debemos olvidar que las tres expresiones definen la misma función y que por lo tanto, solo son tres formas distintas de escribir lo mismo.

EJEMPLO 4.1.2 El campo $f(x, y, z) = 6x - y + 2z$ es un campo lineal y se puede escribir como:

$$f(x, y, z) = 6x - y + 2z = (6, -1, 2) \cdot (x, y, z)$$ ——

Recordemos ahora las propiedades más importantes de los campos lineales. Si f es un campo escalar lineal, entonces:

TEOREMA 4.1.3 *Si f es un campo escalar lineal, entonces:*

1. $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$ *para todo* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.
2. $f(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})$ *para todo* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ *y para todo* $k \in \mathbb{R}$.
3. *Si para cada* i
$$a_i = f(\mathbf{e}_i) = f(0, \ldots, \overset{i}{\check{1}}, \ldots, 0)$$
y $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, *entonces* $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}$.

Las dos primeras propiedades caracterizan a las aplicaciones lineales y son usadas para definir este tipo de aplicaciones en espacios vectoriales generales. La tercera propiedad se usa fundamentalmente para hacer desarrollos sobre aplicaciones lineales desconocidas o arbitrarias, ya que nos da una forma de expresar los coeficientes a partir de la propia aplicación.

Los campos lineales no deben confundirse con los *campos afines*, que se definen a partir de ellos y que también utilizaremos en adelante.

DEFINICIÓN 4.1.4 *Un campo afín en* $\mathbb{R}^n$ *responde a la expresión*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + b,$$

que puede ser escrita haciendo uso del producto escalar como

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} + b.$$

En el caso particular de $\mathbb{R}^2$, haremos uso de los grafos de los campos lineales y afines. Concretamente, el grafo del campo $f(x,y) = a_1x + a_2y$ es el plano

$$a_1x + a_2y - z = 0,$$

que pasa por el origen de coordenadas y es normal al vector $(a_1, a_2, -1)$. De la misma forma, el grafo del campo afín $f(x,y) = a_1x + a_2y + b$ es el plano

$$a_1x + a_2y - (z - b) = 0,$$

que pasa por el punto $(0,0,b)$ y es normal al vector $(a_1, a_2, -1)$.

A lo largo del tema, trabajaremos con planos en $\mathbb{R}^3$, por lo que es conveniente repasar las distintas formas de expresar analíticamente este tipo de conjuntos. En particular, para determinar un plano en $\mathbb{R}^3$ es suficiente con dar un punto del plano, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, y vector normal, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$; la ecuación del plano dado por estos dos elementos es

$$v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0.$$

Esto es consecuencia de la definición del producto escalar, por la cual el producto escalar de dos vectores perpendiculares es 0. En este caso, si $P = (x, y, z)$ es cualquier punto del plano, entonces el vector $\overrightarrow{P_0P} = P - P_0$ es perpendicular al vector $\boldsymbol{v}$ y por lo tanto, la expresión anterior se deduce como sigue:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{v} \cdot (P - P_0) = 0 \\
&(v_1, v_2, v_3) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \\
&v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.1.3 1. La recta perpendicular al vector $(1, -2)$ y que pasa por el origen de coordendas es:

$$x - 2y = 0$$

Si queremos que la recta pase por el punto $(0, -1)$, la ecuación es:

$$\begin{aligned}
x - 2(y + 1) &= 0 \\
x - 2y - 2 &= 0
\end{aligned}$$

2. El plano perpendicular al vector $(-2, 1, -1)$ y que pasa por el origen de coordenadas es:

$$-2x + y - z = 0$$

Si queremos que el plano pase por el punto $(-1, 0, 1)$, la ecuación es:

$$\begin{aligned}
-2(x + 1) + y - (z - 1) &= 0 \\
-2x + y - z - 1 &= 0
\end{aligned}$$

—

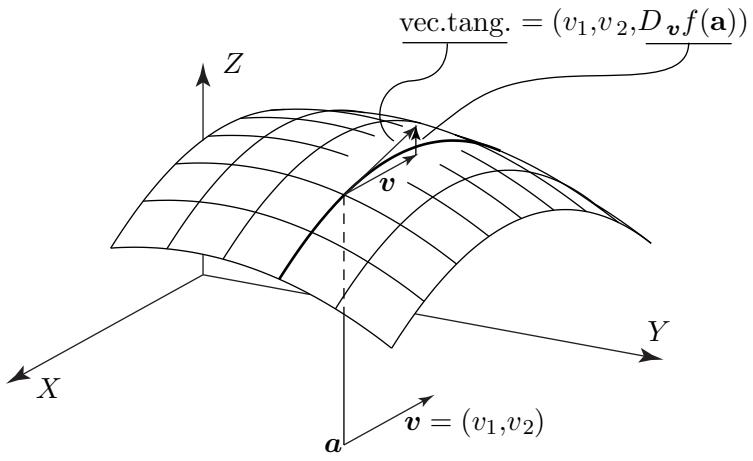


Figura 4.3: Representación de la derivada direccional.

4.1.2. Diferenciabilidad

La definición de derivabilidad de funciones reales de variable real se introduce con dos objetivos:

- En términos geométricos, para formalizar la noción de *suavidad* de una curva y proveer una definición analítica de recta tangente.
- Desde el punto de vista de la física, para introducir la noción de *tasa de cambio puntual* de una magnitud escalar; por ejemplo, la velocidad cuando estudiamos movimientos o la tasa de variación de la temperatura en un recinto sometido a una fuente de calor.

Si las magnitudes estudiadas dependen de varias variables (la temperatura en una sala dependerá de la posición en la que situemos el termómetro), también tiene sentido plantearnos las preguntas anteriores y, por lo tanto, necesitaremos extender los conceptos planteados a estas nuevas situaciones.

Usaremos ejemplos en $\mathbb{R}^2$ para motivar los conceptos pero generalizaremos las definiciones a cualquier campo.

Derivadas direccionales. Una primera aproximación para dar respuesta a las cuestiones anteriores sería la siguiente. En lugar de considerar que desde un punto nos podemos mover en cualquier dirección y de forma libre, imaginamos que desde ese punto $\boldsymbol{a}$, nos movemos sobre una recta en una dirección $\boldsymbol{v}$. Entonces, el valor del campo sobre esta recta puede expresarse usando una función de una variable,

$$g(t) = f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}).$$

La tasa de cambio puntual en el punto $\boldsymbol{a}$ y en la dirección $\boldsymbol{v}$ puede entonces determinarse utilizando la derivada de esta función en $t = 0$ (ya que $g(0) = f(\boldsymbol{a})$), es decir, $g'(0)$; este número se denomina *derivada direccional* (ver figura 4.3).

DEFINICIÓN 4.1.5 *Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $\boldsymbol{a} \in D$. Sea $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ y consideremos la función real de una variable real $f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{v}}(t) = f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v})$. Llamamos* derivada direccional de f en el punto $\boldsymbol{a}$ y en la dirección $\boldsymbol{v}$ *y la denotamos por* $\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a})$ *a*

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = f'_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{v}}(0).$$

EJEMPLO 4.1.4 Para el campo $f(x, y) = 2x^2y - xy^2$ vamos a calcular su derivada direccional en el punto $\boldsymbol{a} = (2, -1)$ y en la dirección $\boldsymbol{v} = (1, 1)$:

$$\begin{aligned} f_{(2,-1),(1,1)}(t) &= 2(2+t)^2(-1+t) - (2+t)(-1+t)^2 \\ &= t^3 + 6t^2 + 3t - 10 \\ f'_{(2,-1),(1,1)}(t) &= 3t^2 + 12t + 3 \\ \mathrm{D}_{(1,1)} f(2,-1) &= f'_{(2,-1),(1,1)}(0) = 3 \end{aligned}$$

——

Si repetimos el cálculo del ejemplo anterior para el mismo campo y el mismo punto pero en la dirección $(2, 2)$, obtendremos que $\mathrm{D}_{(2,2)} f(2, -1) = 6$. Este resultado es obviamente distinto del que hemos obtenido en el ejemplo, sin embargo, las direcciones y sentidos definidos por los vectores $(1, 1)$ y $(2, 2)$ son los mismos. Esto supone que, en la práctica, no podemos comparar las derivadas direccionales de campos diferentes o en distintas direcciones, ya que sus valores dependen del módulo de los vectores. Por esta razón, para definir formalmente la *tasa de cambio puntual* utilizaremos vectores unitarios.

DEFINICIÓN 4.1.6 *Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar, $\boldsymbol{a} \in D$ y $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}$. Llamamos* tasa de cambio puntual de f en el punto $\boldsymbol{a}$ y en la dirección $\boldsymbol{v}$ *a la derivada* $\mathrm{D}_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{a})$*, en donde* $\boldsymbol{u} = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|}\boldsymbol{v}$.

Plano tangente y derivadas parciales. Una vez resuelto el problema de definir la tasa de cambio puntual, vamos a abordar el problema de la definición del plano tangente. Tal y como hemos definido la derivada direccional, es fácil observar que el vector $(v_1, v_2, \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}))$ es tangente al grafo de f en $\boldsymbol{a}$ y que por lo tanto, debe estar contenido en el plano tangente que queremos determinar. Más aún, cualquier vector contenido en este plano se podrá determinar de esta forma (ver figuras 4.3 y 4.4).

Usando las propiedades de la sección 4.1.1, los vectores $(v_1, v_2, \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}))$ forman un plano si y solo si $\lambda(\boldsymbol{v}) = \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a})$ es un campo escalar lineal. En

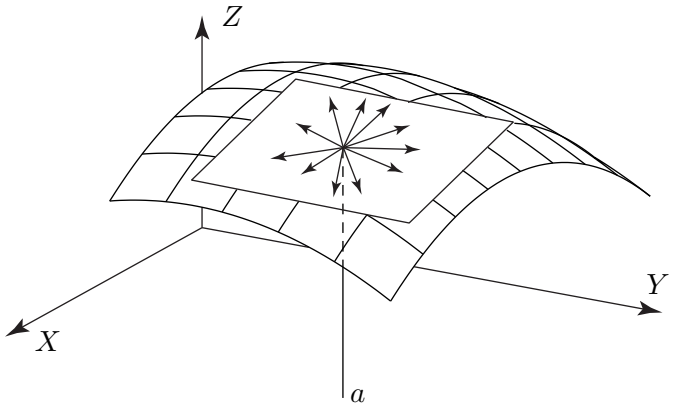


Figura 4.4: Construcción del plano tangente.

tal caso, existe un vector, que denotamos $\nabla f(a)$, tal que $\lambda(\boldsymbol{v}) = \nabla f(a) \cdot \boldsymbol{v}$, es decir

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = \nabla f(a) \cdot \boldsymbol{v}.$$

Este vector se denomina *vector gradiente de f en $\boldsymbol{a}$* y, por el apartado 3 del teorema 4.1.3, es igual a $\nabla f(a) = (\mathrm{D}_{\mathrm{e}_1} f(\boldsymbol{a}), \mathrm{D}_{\mathrm{e}_2} f(\boldsymbol{a}))$. Las componentes del vector gradiente se denominan *derivadas parciales de f en $\boldsymbol{a}$* y se denotan $\mathrm{D}_1 f(\boldsymbol{a}) = \mathrm{D}_{\mathrm{e}_1} f(\boldsymbol{a})$ y $\mathrm{D}_2 f(\boldsymbol{a}) = \mathrm{D}_{\mathrm{e}_2} f(\boldsymbol{a})$, es decir

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = (\mathrm{D}_1 f(\boldsymbol{a}), \mathrm{D}_2 f(\boldsymbol{a})).$$

Ejemplo 4.1.5 Para el campo $f(x, y) = 2x^2y - xy^2$ del ejemplo 4.1.4 vamos a calcular su vector gradiente en el punto $\boldsymbol{a} = (2, -1)$:

$$\begin{aligned} f_{(2,-1),(v_1,v_2)}(t) &= 2(2 + tv_1)^2(-1 + tv_2) - (2 + tv_1)(-1 + tv_2)^2 \\ &= (-v_1v_2^2 + 2v_1^2v_2)t^3 + (-2v_1^2 - 2v_2^2 + 10v_1v_2)t^2 + \\ &\quad (-9v_1 + 12v_2)t - 10 \\ f'_{(2,-1),(v_1,v_2)}(t) &= -3(-v_1v_2^2 + 2v - 1^2v_2)t^2 \\ &\quad + 2t(-2v_2^2 + 10v_1v_2) + (-9v_1 + 12v_2) \\ \mathrm{D}_{(v_1,v_2)} f(2, -1) &= f'_{(2,-1),(v_1,v_2)}(0) = -9v_1 + 12v_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lambda(v_1, v_2) = \mathrm{D}_{(v_1,v_2)} f(2, -1)$ es una campo lineal:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_{(v_1,v_2)} f(2, -1) &= (-9, 12) \cdot (v_1, v_2) \\ \nabla f(2, -1) &= (-9, 12) \end{aligned}$$

Según vimos en la sección anterior, el plano dado por la imagen de este campo es perpendicular al vector $(-9, 12, -1)$ y en consecuencia, el plano tangente al grafo de f en $\boldsymbol{a} = (2, -1)$ es perpendicular a $(-9, 12, -1)$ y pasa por el punto $(2, -1, f(2, -1)) = (2, -1, -10)$, es decir:

$$-9(x - 2) + 12(y + 1) - (z + 10) = 0 \qquad \text{——}$$

DEFINICIÓN 4.1.7 *Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar, $\boldsymbol{a} \in D$ y supongamos que $\lambda(\boldsymbol{v}) = \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a})$ es un campo lineal tal que*

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v}.$$

1. *El vector $\nabla f(\boldsymbol{a})$ se denomina* vector gradiente *de f en $\boldsymbol{a}$.*
2. *Si $\nabla f(\boldsymbol{a}) = (\mathrm{D}_1 f(a), \ldots, \mathrm{D}_n f(a))$, las componentes $\mathrm{D}_i f(\boldsymbol{a})$ se denominan* derivadas parciales *de f en $\boldsymbol{a}$.*
3. *El conjunto de los vectores $(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tales que:*

   $$\mathrm{D}_1 f(\boldsymbol{a}) v_1 + \cdots + \mathrm{D}_n f(\boldsymbol{a}) v_n - v_{n+1} = 0$$

   se denomina espacio vectorial tangente *al campo f en el punto $\boldsymbol{a}$.*
4. *El conjunto de los puntos $(x_1, \ldots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tales que:*

   $$\mathrm{D}_1 f(\boldsymbol{a})(x_1 - a_1) + \cdots + \mathrm{D}_n f(\boldsymbol{a})(x_n - a_n) - (z - f(\boldsymbol{a})) = 0$$

   se denomina espacio afín tangente *al campo f en el punto $\boldsymbol{a}$. Si $n = 2$ lo denominamos* plano tangente *y si $n = 1$ lo denominamos* recta tangente.

Notación de Leibniz. Hemos definido en el apartado anterior las derivadas parciales como las componentes del vector gradiente y las hemos denotado como $\mathrm{D}_i f(\boldsymbol{a})$. Esta notación extiende la notación $\mathrm{D}f(a)$ para la derivada de funciones reales, que denotamos más habitualmente por $f'(a)$. Estas notaciones son adecuadas para aplicarlas sobre el nombre que le demos a la función, sin embargo, en algunas ocasiones podremos trabajar sobre campos sin utilizar un nombre específico; en estos casos, debemos utilizar la *notación de Leibniz*. Por ejemplo, con esta notación, la derivada de la función dada por la expresión $x^2 - \operatorname{sen} x$ se escribe como:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 - \operatorname{sen} x) = 2x - \cos x$$

En ningún caso, es admisible escribir $(x^2 - \operatorname{sen} x)'$ para representar esta derivada.

Si queremos indicar el valor de la función derivada en el punto $x = \pi$, escribiremos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}_{|x=\pi}(x^2 - \operatorname{sen} x) = 2\pi - 1$$

Para campos escalares, también podemos utilizar la notación de Leibniz, aunque en este caso, se utiliza la letra '∂' en lugar de la letra 'd'. Por ejemplo, las derivadas parciales del campo $f(x, y) = 2x^2 y - xy^2$ se escribirán

$$\mathrm{D}_1 f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 y - xy^2), \qquad \mathrm{D}_1 f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2 y - xy^2).$$

Aunque ya sabemos calcular las derivadas parciales usando su definición, hemos podido comprobar que el método resulta bastante laborioso. Haciendo uso de la notación de Leibniz, vamos a deducir un método mucho más simple. Es decir, vamos a mostrar como calcular la derivada respecto de x de un campo $f(x,y)$, es decir, $\mathrm{D}_1 f$, en cualquier punto (a,b)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}_{|(x,y)=(a,b)} f(x,y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{|t=0} f(a+t,b)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}_{|x=a} f(x,b)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{|t=0}(a+t) \qquad (4.1)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}_{|x=a} f(x,b) \qquad (4.2)\\ \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,y) \qquad (4.3)\end{aligned}$$

En (4.1), hemos aplicado la regla de la cadena para funciones reales; para ello, hemos utilizado la función de una variable $g(x) = f(x,b)$. En (4.2), hemos simplificado teniendo en cuenta que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a+t) = 1$. Como conclusión, obtenemos la igualdad (4.3), que nos dice que: *hallar la parcial de un campo $f(x,y)$ respecto de la variable x es igual a hallar la derivada de la expresión $f(x,y)$ considerando a x como variable y a y como constante.*

Naturalmente, la regla anterior se puede utilizar para cualquier campo y para cualquier variable.

Proposición 4.1.8 *La parcial $\mathrm{D}_i f(x_1,\ldots,x_n) = \dfrac{\partial}{\partial x_i} f(x_1,\ldots,x_n)$ en el punto $(x_1,\ldots,x_n)$ se calcula derivando la expresión del campo en la cual se considera que x_i es la variable y el resto son constantes.*

Ejemplo 4.1.6 Vamos a calcular las derivadas parciales del campo $f(x,y) = 2x^2y - xy^2$ según el método anterior y utilizarlas para determinar el vector gradiente en el punto $\boldsymbol{a} = (2,-1)$, así como la derivada direccional en $\boldsymbol{v} = (1,1)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_1 f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y - xy^2) = 4xy - y^2\\ \mathrm{D}_2 f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y - xy^2) = 2x^2 - 2xy\\ \nabla f(2,-1) &= (-9,12)\\ \mathrm{D}_{(1,1)} f(2,-1) &= \nabla f(2,-1)\cdot(1,1) = (-9,12)\cdot(1,1) = 3\end{aligned}$$ ——

Diferenciabilidad. Aunque ya hemos introducido las nociones de tasa de cambio puntual y de plano tangente, todavía no hemos definido la propiedad

de diferenciabilidad de campos escalares. Puede parecer que la existencia de los vectores tangentes y que todos ellos formen un plano es suficiente para garantizar una noción adecuada de diferenciabilidad, sin embargo, esto no es así. De hecho, se pueden establecer ejemplos donde el plano tangente así calculado no responde a la idea intuitiva inicial para esa noción. Por lo tanto, en adelante, solo calcularemos y utilizaremos las tasas de cambio puntuales y los espacios tangentes para aquellos campos que verifiquen la condición de diferenciabilidad que definimos a continuación. Esta condición se puede expresar de manera sencilla como sigue: *El plano tangente calculado en los apartados anteriores, debe ser el plano que mejor aproxime al campo escalar en las cercanías del punto* $\boldsymbol{a}$.

Antes de abordar el problema planteado en esta introducción, necesitamos introducir formalmente la noción de *entorno* en $\mathbb{R}^n$, que utilizamos para hablar de cercanía a un punto.

DEFINICIÓN 4.1.9 *Llamamos* bola abierta de radio ε y centro $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ *al conjunto*

$$B(\boldsymbol{a}, \varepsilon) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon\}.$$

Decimos que un conjunto E *es un* entorno *del punto* $\boldsymbol{a}$*, si existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $B(\boldsymbol{a}, \varepsilon) \subset E$.

En particular, para $n = 2$, las bolas abiertas son círculos de radio ε y centro en $\boldsymbol{a}$:

$$B((a_1, a_2), \varepsilon) = \{(x, y) \mid \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} < \varepsilon\} = \\ = \{(x, y) \mid (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < \varepsilon^2\}.$$

Análogamente, para $n = 3$, las bolas abiertas son esferas de radio ε y centro en $\boldsymbol{a}$:

$$B((a_1, a_2, a_3), \varepsilon) = \{(x, y, z) \mid (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 < \varepsilon^2\}.$$

Hemos visto anteriormente que el plano tangente al grafo de un campo f en un punto $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ es el grafo del campo afín

$$z = f(a_1, a_2) + \nabla f(a_1, a_2) \cdot (x - a_1, y - a_2);$$

la propiedad de que este plano tangente sea el que mejor aproxime al campo escalar en las cercanías del punto $\boldsymbol{a}$ se expresa analíticamente con el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x, y) - (f(a_1, a_2) + \nabla f(a_1, a_2) \cdot (x - a_1, y - a_2))}{\|(x - a_1, y - a_2)\|} = 0;$$

o equivalentemente:

$$f(x,y) = f(a_1,a_2) + \nabla f(a_1,a_2)\cdot(x-a_1, y-a_2) + \|(x-a_1,y-a_2)\|E(x,y)$$
$$\text{en donde } \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} E(x,y) = 0.$$

También se suele decir que el campo $z = f(a_1,a_2)+\nabla f(a_1,a_2)\cdot(x-a_1,y-a_2)$ es el campo afín que mejor aproxima a f en un entorno suficientemente pequeño de $\boldsymbol{a} = (a_1,a_2)$

Ejemplo 4.1.7 Consideremos el campo $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2+y)$. Vamos a utilizar el gradiente en $(0,0)$ para aproximar el valor del campo en $x = 0.1$, $y = 0.1$:

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y) &= (2x\cos(x^2+y), \cos(x^2+y))\\ \nabla f(0,0) &= (0,1)\\ f(x,y) &\approx 0 + (0,1)\cdot(x,y) = y\\ f(0.1,0.1) &\approx 0.1\\ f(0.1,0.1) &= \operatorname{sen}(0.11) = 0.1097\end{aligned}$$

Definición 4.1.10 *Sea $f\colon D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ un campo escalar y $\boldsymbol{a}\in D$ para el cual existe el vector gradiente $\nabla f(\boldsymbol{a})$.*

1. *Decimos que f es* diferenciable *en $\boldsymbol{a}$ si*
$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{1}{\|\boldsymbol{h}\|}(f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - \nabla f(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h}) = 0$$
2. *En este caso, decimos que el campo afín $\lambda(\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h}$ es* la mejor aproximación lineal *de f en un entorno de $\boldsymbol{a}$.*

Ejemplo 4.1.8
1. Los campos constantes, $f(\boldsymbol{x}) = c$, son diferenciables: $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ para todo $\boldsymbol{a}$ y
$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{1}{\|\boldsymbol{h}\|}(f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - \nabla f(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h}) =$$
$$= \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{1}{\|\boldsymbol{h}\|}(c - c - 0) = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} 0 = 0$$
2. Los campos lineales, $g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}$, son diferenciables: $\nabla g(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{v}$ para todo $\boldsymbol{a}$ y:
$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{1}{\|\boldsymbol{h}\|}(g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - g(\boldsymbol{a}) - \nabla g(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h}) =$$
$$= \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{1}{\|\boldsymbol{h}\|}(\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{h}) =$$
$$= \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{1}{\|\boldsymbol{h}\|}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{h} - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{h}) = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} 0 = 0$$

Aunque puede ser bastante complejo determinar si un campo es o no diferenciable en un punto, en la mayoría de los casos será suficiente con aplicar los resultados que mostramos a continuación y que aseguran la difenciabilidad de los campos expresados a partir de funciones elementales. A lo largo del curso, solo vamos a trabajar con este tipo de funciones, y por lo tanto, no será necesario estudiar la condición de diferenciabilidad a partir de la definición.

TEOREMA 4.1.11 *Si existen todas las derivadas parciales del campo escalar f y son continuas en un entorno del punto $\boldsymbol{a}$, entonces f es diferenciable en $\boldsymbol{a}$.*

La condición dada en este teorema es suficiente para garantizar la diferenciabilidad, pero no es una condición necesaria y, de hecho, se pueden establecer ejemplos bastantes simples de campos diferenciables cuyas derivadas parciales no son continuas. Sin embargo, es bastante frecuente que necesitemos esta condición adicional para obtener propiedades adecuadas para los campos. Decimos que un campo es de *clase* $\mathcal{C}^1$ si es diferenciable y su parciales son continuas.

COROLARIO 4.1.12 *Si un campo escalar está determinado por operaciones algebraicas entre funciones elementales*[2] *(polinomios, exponenciales, trigonométricas, ...) en un dominio D, entonces el campo es continuo y diferenciable en dicho dominio.*

4.1.3. Propiedades del vector gradiente

La siguiente proposición establece que la relación entre continuidad y derivabilidad de las funciones reales se mantiene en la generalización a campos.

PROPOSICIÓN 4.1.13 *Si f es un campo escalar diferenciable en $\boldsymbol{a}$, entonces f es continuo en $\boldsymbol{a}$.*

Aunque en el estudio de campos concretos, no necesitaremos normalmente la aplicación de las propiedades algebraicas que vemos a continuación, estas pueden ser útiles para simplificar cálculos en algunas situaciones y para realizar desarrollos teóricos simples.

PROPOSICIÓN 4.1.14 *Consideremos los campos f y g definidos en $\mathbb{R}^n$, la función de una variable ϕ y la función vectorial $\boldsymbol{\gamma}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.*

1. *Si f y g son diferenciables en $\boldsymbol{a}$, entonces $f+g$ también es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y*
$$\nabla(f+g)(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) + \nabla g(\boldsymbol{a})$$

[2] Recordemos que, aunque las funciones potenciales son consideradas como elementales, algunos casos suponen una excepción a esta regla; concretamente, si $f(x) = x^\alpha$ y $0 < \alpha < 1$, f no es derivable en 0

2. *Si f y g son diferenciables en $\boldsymbol{a}$, entonces fg también es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y*
$$\nabla(fg)(\boldsymbol{a}) = g(\boldsymbol{a})\nabla f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a})\nabla g(\boldsymbol{a})$$

3. *Si f es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y $f(\boldsymbol{a}) \neq 0$, entonces $1/f$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y*
$$\nabla(1/f)(\boldsymbol{a}) = -\frac{1}{[f(\boldsymbol{a})]^2}\nabla f(\boldsymbol{a})$$

4. *Regla de la cadena: Si f es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y ϕ es derivable en $f(\boldsymbol{a})$, entonces $\phi \circ f$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y*
$$\nabla(\phi \circ f)(\boldsymbol{a}) = \phi'(f(\boldsymbol{a}))\nabla f(\boldsymbol{a})$$

5. *Regla de la cadena: Si $\boldsymbol{\gamma}$ es derivable en t_0 y f es diferenciable en $\boldsymbol{\gamma}(t_0)$, entonces $f \circ \boldsymbol{\gamma}$ es derivable en t_0 y*
$$(f \circ \boldsymbol{\gamma})'(t_0) = \nabla f(\boldsymbol{\gamma}(t_0)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(t_0)$$

Deducimos a continuación una importante propiedad del vector gradiente. Si $\boldsymbol{u}$ es un vector unitario, según hemos definido anteriormente, la tasa de cambio puntual de un campo f en un punto $\boldsymbol{a}$ y en la dirección $\boldsymbol{u}$ es:

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{u} = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\| \cos\alpha,$$

en donde α es el ángulo formado por los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\nabla f(\boldsymbol{a})$. Por lo tanto, dado que el módulo del vector gradiente es constante, el valor de la tasa de cambio depende solamente del ángulo que el vector gradiente forma con la dirección considerada.

1. Si $\alpha = 0$, el vector $\boldsymbol{u}$ tiene la misma dirección que el vector gradiente; en esta dirección, el valor del coseno es máximo y por lo tanto, el valor de la tasa de cambio puntual es máximo e igual a $\|\nabla f(\boldsymbol{a})\|$.

2. Si $\alpha = \pi/2$, el vector $\boldsymbol{u}$ es perpendicular al vector gradiente; en esta dirección, el valor del coseno es 0, es decir, la tasa de cambio puntual es nula en la dirección perpendicular al vector gradiente.

En la figura 4.5 representamos dos curvas de nivel de un campo f. Si nos movemos desde el punto (a_1, a_2) y queremos sufrir el cambio más rápido en el valor del campo, tendremos que ir en la dirección que nos da mayor proximidad a la siguiente curva de nivel. La propiedad (1) nos indica que esta dirección es la dada por el vector gradiente de f en ese punto.

Pero si nos movemos sobre la curva de nivel, no sufrimos ninguna variación en el valor del campo, es decir, la derivada direccional es 0; la propiedad (2)

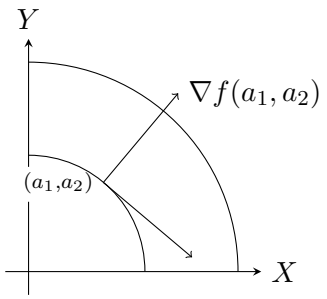


Figura 4.5: El gradiente da la dirección de derivada direccional máxima.

nos dice que esta dirección es normal al vector gradiente. Esta propiedad es válida para cualquier campo, como probamos a continuación.

Sea $\boldsymbol{\gamma}\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ la parametrización de una curva contenida en una superficie de nivel de un campo f, es decir, $f(\boldsymbol{\gamma}(t)) = c$ para todo t, y supongamos que esta curva pasa por el punto $\boldsymbol{a}$, es decir, $\boldsymbol{\gamma}(t_0) = \boldsymbol{a}$. Una simple aplicación de la regla de la cadena vista anteriormente justifica el siguiente desarrollo:

$$0 = (f \circ \boldsymbol{\gamma})'(t_0) = \nabla f(\boldsymbol{\gamma}(t_0)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(t_0)$$

El vector derivada $\boldsymbol{\gamma}'(t_0)$ es tangente a la curva y por lo tanto a la superficie de nivel; en consecuencia, la igualdad anterior permite afirmar que estos vectores son perpendiculares al vector gradiente.

TEOREMA 4.1.15 *Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo diferenciable y consideremos una superficie de nivel $f(\boldsymbol{x}) = c$ y un punto $\boldsymbol{a}$ en dicha superficie. Entonces, $\nabla f(\boldsymbol{a})$ es un vector normal al plano tangente a la superficie de nivel en punto $\boldsymbol{a}$. Por lo tanto, el espacio vectorial tangente a la superficie es:*

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

y el espacio afín tangente es:

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = 0$$

Como casos particulares, vamos a mostrar las expresiones de las rectas y planos tangentes a curvas de nivel en $\mathbb{R}^2$ y superficies de nivel en $\mathbb{R}^3$:

1. La recta tangente a la curva dada por $f(x, y) = c$ en un punto (x_0, y_0) es:

$$\mathrm{D}_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + \mathrm{D}_2 f(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

3. Análogamente, el plano tangente a la superficie dada por $g(x, y, z) = c$ (ver figura 2) en un punto (x_0, y_0, z_0) es:

$$\mathrm{D}_1 g(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+\mathrm{D}_2 g(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+\mathrm{D}_3 g(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0$$

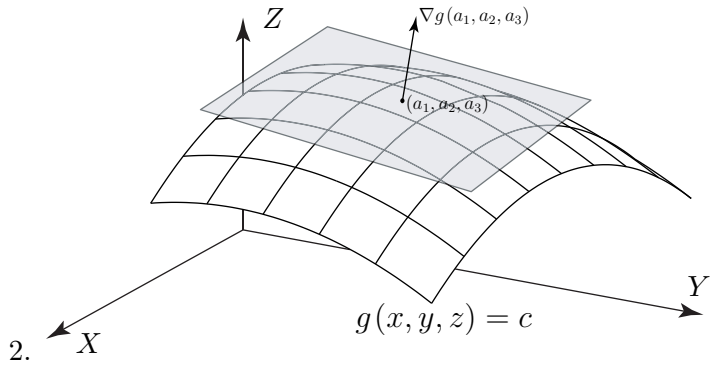


Figura 4.6: El gradiente es normal a la superficie de nivel.

Ejemplo 4.1.9 En el tema anterior hemos aprendido a calcular las rectas tangentes a curvas parametrizadas. En particular, podríamos obtener la recta tangente a una cónica utilizando las parametrizaciones que hemos introducido para las cónicas. Ahora, haciendo uso del vector gradiente, podemos calcular más fácilmente estas rectas. Por ejemplo, la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es una curva de nivel del campo

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

y por lo tanto, un vector normal a dicha superficie en un punto (x_0, y_0) es

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2} \right);$$

en consecuencia, la recta tangente es:

$$\begin{aligned}
\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) &= 0 \\
\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) &= 0 \\
\frac{x_0}{a^2}x - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0}{b^2}y - \frac{y_0^2}{b^2} &= 0 \\
\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y &= \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \\
\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y &= 1
\end{aligned}$$

——

Ejemplo 4.1.10 Dado un campo escalar en $\mathbb{R}^2$, su grafo puede considerarse como la superficie de nivel de un campo en $\mathbb{R}^3$:

$$g(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

Efectivamente, si $g(x, y, z) = 0$, entonces $z = f(x, y)$. Por lo tanto, el plano tangente a $g(x, y, z) = 0$ es normal al vector

$$\nabla g(x_0, y_0, z_0) = (\mathrm{D}_1 f(x_0, y_0), \mathrm{D}_2 f(x_0, y_0), -1),$$

que permite construir el plano tangente introducido en la definición 4.1.7:

$$\mathrm{D}_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + \mathrm{D}_2 f(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0 \qquad \text{——}$$

4.1.4. Derivación implícita

Decimos que un campo $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ está definido *implícitamente* si la relación entre su valor y y sus argumentos está dada por una expresión del tipo

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0.$$

Por ejemplo, introduciríamos un campo definido implícitamente diciendo: *consideremos el campo $z = f(x, y)$ tal que*

$$x^2 + y^2 - \ln z = 0.$$

Podemos entender fácilmente que este tipo de funciones surgirán, por ejemplo, si queremos tratar una superficie o curva definida en forma cartesiana como el grafo de un campo o función. En el ejemplo anterior, es inmediato transformar su definición en una expresión explícita del campo y hallar su vector gradiente:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \exp(x^2 + y^2) \\ \nabla f(x, y) &= (2x \exp(x^2 + y^2), 2y \exp(x^2 + y^2)) \end{aligned}$$

El problema que nos planteamos en esta sección es estudiar la diferenciabilidad de un campo definido en forma implícita si no es sencillo obtener una expresión explícita.

Para poder comparar los resultados, seguimos trabajando con el ejemplo anterior pero sobre su forma implícita. Lo que haremos es considerar el campo en $\mathbb{R}^2$

$$G(x, y) = x^2 + y^2 - \ln z$$

en donde $z = f(x, y)$; es decir, $G(x, y)$ es constantemente 0 si $z = f(x, y)$ y, en consecuencia, su vector gradiente es nulo. A partir de ahí, podemos calcular el vector gradiente de z como sigue:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 - \ln z) = 2x - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2xz \\ 0 = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 - \ln z) = 2x - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2yz \end{aligned}$$

Estas expresiones coinciden con las obtenidas más arriba si tenemos en cuenta que $z = \exp(x^2 + y^2)$.

El siguiente teorema, conocido como *teorema de la función implícita*, asegura que el proceso realizado en el ejemplo anterior es correcto y establece en qué condiciones podemos afirmar que existe la función así definida. En el enunciado, hablamos de *puntos interiores* a un conjunto: decimos que $\boldsymbol{a}$ es un punto interior a D si D es un entorno de $\boldsymbol{a}$.

TEOREMA 4.1.16 *Sea* $F\colon D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *diferenciable y con parciales continuas en el conjunto* D. *Sea* $(a_1, \ldots, a_n, b)$ *un punto interior a* D *tal que* $F(a_1, \ldots, a_n, b) = 0$ *y* $\mathrm{D}_{n+1}F(a_1, \ldots, a_n, b) \neq 0$. *Entonces:*

1. *Existe un campo* $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *en donde* A *es un entorno de* $(a_1, \ldots, a_n)$, *tal que*

$$F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) = 0$$

   (es decir, está definido implícitamente por $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$.

2. f *es diferenciable y*

$$\mathrm{D}_i f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))}$$

Obsérvese en primer lugar que el resultado es "local", es decir, afirmamos la existencia de una función definida en un entorno de un punto; en general, esto no supondrá un gran problema, ya que habitualmente solo estaremos interesados en lo que ocurre en el punto.

Como en el ejemplo que hemos desarrollado más arriba, el teorema no nos dice nada de cómo determinar una expresión explícita del campo, pero sí nos da la herramienta necesaria para tratar las cuestiones de diferenciabilidad sin conocer tal expresión.

Por último, aunque en el enunciado se ha colocado la función definida implícitamente en la coordenada $n + 1$, el resultado es independiente de esta posición; además, trabajando con la notación de Leibniz, la posición de las variables en la secuencia de argumentos es irrelevante.

EJEMPLO 4.1.11 Vamos a comprobar si la expresión $x^2 + y^2 - 1 = 0$ define a y como función de x. Si derivamos implícitamente obtenemos

$$2x + 2yy' = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}$$

Por lo tanto, si $y_0 \neq 0$, la expresión define a y como función de x en un entorno de (x_0, y_0); es decir, no podemos afirmar el resultado en los puntos $(1,0)$, $(-1,0)$.

Si despejamos y en función de x, obtenemos dos posibles funciones:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \qquad g(x) = -\sqrt{1-x^2}.$$

Ninguna de las dos funciones son derivables en $x = 0$, lo que corresponde a los puntos que quedan excluidos por el teorema de la función implícita. ——

4.1.5. Derivadas de orden superior

Para un campo $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable hemos definido las derivadas parciales para cada punto del dominio y por lo tanto, estas definen un campo escalar para cada i con $1 \leq i \leq n$:

$$\mathrm{D}_i f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Tiene entonces sentido estudiar la diferenciabilidad de estos campos y calcular sus derivadas parciales. Las derivadas parciales de los campos $\mathrm{D}_i f$ se denominan *derivadas de segundo orden* de f y las notaciones posibles para ellas son

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad \mathrm{D}_i(\mathrm{D}_j f) = \mathrm{D}_{ij} f.$$

Por el corolario 4.1.12, la continuidad de las derivadas parciales de segundo orden asegura la diferenciabilidad de las derivadas parciales de f; en tal caso, decimos que f es de *clase* $\mathcal{C}^2$. Una importante propiedad de estos campos queda establecida por el siguiente teorema, que asegura que el orden de derivación no influye en el resultado.

Teorema 4.1.17 (de Schwarz) *Sea f un campo escalar tal que sus derivadas parciales de segundo orden son continuas; entonces, para cada i, j:*

$$\mathrm{D}_{ij} f = \mathrm{D}_{ji} f$$

Para los campos de clase $\mathcal{C}^2$ y para cada punto de su dominio, definimos la siguiente matriz $n \times n$, que se denomina *matriz Hessiana* de f en $\boldsymbol{a}$:

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \mathrm{D}_{11} f(\boldsymbol{a}) & \mathrm{D}_{12} f(\boldsymbol{a}) & \cdots & \mathrm{D}_{1n} f(\boldsymbol{a}) \\ \mathrm{D}_{21} f(\boldsymbol{a}) & \mathrm{D}_{22} f(\boldsymbol{a}) & \cdots & \mathrm{D}_{2n} f(\boldsymbol{a}) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \mathrm{D}_{n1} f(\boldsymbol{a}) & \mathrm{D}_{n2} f(\boldsymbol{a}) & \cdots & \mathrm{D}_{nn} f(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

Obsérvese que, por el teorema de Schwarz, esta matriz es simétrica. A partir de ella, definimos el campo

$$\mathrm{d}^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}^t \nabla^2 f(\boldsymbol{a}) \boldsymbol{u},$$

que se denomina *segunda diferencial de f en $\boldsymbol{a}$*. Como ya dijimos anteriormente, cuando trabajamos con expresiones matriciales, los vectores deben tratarse como matrices columna y por esta razón escribimos la matriz transpuesta $\boldsymbol{u}^t$ a la izquierda de la matriz hessiana.

Ejemplo 4.1.12 Vamos a calcular $\mathrm{d}^2 f_{\boldsymbol{a}}$ para $f(x,y) = 2x^2y - xy^2$ y $\boldsymbol{a} = (2,-1)$:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= 2x^2y - xy^2 \\
\nabla f(x,y) &= (4xy - y^2, 2x^2 - 2xy) \\
\nabla^2 f(x,y) &= \begin{pmatrix} 4y & 4x-2y \\ 4x-2y & -2x \end{pmatrix} \\
\nabla^2 f(2,-1) &= \begin{pmatrix} -4 & 10 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} \\
\mathrm{d}^2 f_{(2,-1)}(u_1,u_2) &= (u_1\ u_2) \begin{pmatrix} -4 & 10 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\
\mathrm{d}^2 f_{(2,-1)}(u_1,u_2) &= -4u_1^2 + 20u_1u_2 - 4u_2
\end{aligned}$$

——

Como vemos en este ejemplo, la expresión obtenida para $\mathrm{d}^2 f_{(2,-1)}$ es un polinomio de grado 2 sin términos de grado 1 y grado 0; estas expresiones se denominan *formas cuadráticas*.

Todo el desarrollo mostrado en esta sección puede continuarse para definir las derivadas parciales de órdenes superiores (orden tres, cuatro,...). Sin embargo, en este curso solo trabajaremos con las derivadas de segundo orden. Por ejemplo, con estas derivadas, podemos mejorar la aproximación dada por el vector gradiente en la definición de diferenciabilidad.

Teorema 4.1.18 (Fórmula de Taylor) *Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar dos veces diferenciable y con parciales de segundo orden continuas. Entonces:*

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^t \nabla^2 f(\boldsymbol{a}) \boldsymbol{u} + \|\boldsymbol{u}\|^2 E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}),$$

en donde $\lim_{\|\boldsymbol{u}\|\to 0} E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}) = 0$.

Es decir, el campo $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{u})$, en un entorno lo suficientemente pequeño de $\boldsymbol{a}$, tiene un comportamiento parecido al polinomio de segundo orden

$$f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^t \nabla^2 f(\boldsymbol{a}) \boldsymbol{u}.$$

Este polinomio también lo podemos escribir como:

$$T(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^t \nabla^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}).$$

EJEMPLO 4.1.13 En el ejemplo 4.1.7 determinamos una aproximación del campo $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y)$ en $x = 0.1$, $y = 0.1$ usando el gradiente en $(0, 0)$. Vamos a mejorar esta aproximación utilizando el polinomio de Taylor de orden 2.

$$\nabla f(x, y) = (2x\cos(x^2 + y), \cos(x^2 + y))$$
$$\nabla f(0, 0) = (0, 1)$$
$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2\cos(x^2 + y) - 4x^2 \operatorname{sen}(x^2 + y) & -2x \operatorname{sen}(x^2 + y) \\ -2x \operatorname{sen}(x^2 + y) & -\operatorname{sen}(x^2 + y) \end{pmatrix}$$
$$\nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$f(x, y) \approx 0 + (0, 1) \cdot (x, y) + \frac{1}{2}(x\ y) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y + x^2$$
$$f(0.1, 0.1) \approx 0.1 + 0.01 = 0.11$$
$$f(0.1, 0.1) = \operatorname{sen}(0.11) = 0.1097\ldots$$

Como se observa, el resultado obtenido ahora está más cerca del valor real que el obtenido en el ejemplo 4.1.7. ——

Igual que para funciones de una variable, también podemos definir el polinomio de Taylor de cualquier orden y enunciar el correspondiente teorema. Por otra parte, las propiedades algebraicas del polinomio de Taylor que estudiamos en el primer tema, también son aplicables a campos escalares, lo que permite calcular los polinomios de Taylor de funciones expresadas en términos de funciones elementales sin calcular explícitamente las derivadas parciales.

PROPOSICIÓN 4.1.19 *1. El n-ésimo polinomio de Taylor de $f + g$ es la suma de los n-ésimos polinomios de Taylor de f y g.*

2. *El n-ésimo polinomio de Taylor de $f \cdot g$ es el producto de los n-ésimos polinomios de Taylor de f y g* desechando los sumandos de grado mayor que n.

3. *El n-ésimo polinomio de Taylor de $f \circ g$ es la composición de los n-ésimos polinomios de Taylor de f y g* desechando los sumandos de grado mayor que n.

Ejemplo 4.1.14 Vamos a calcular el polinomio de Taylor de orden 2 del campo $f(x,y) = x^2 \cos y$ en el punto $(2,0)$. Dado que x^2 es un polinomio, coincide con su polinomio de Taylor; por lo tanto, solo necesitamos centrarlo en 2:

$$x^2 = ((x-2)+2)^2 = 4 + 4(x-2) + (x-2)^2$$

El polinomio de Taylor de $\cos y$ de orden 2 en 0 es: $1 - \frac{y^2}{2}$. Por lo tanto, el polinomio de Taylor de f es:

$$\begin{aligned} T(x,y) = (4 + 4(x-2) + (x-2)^2)\left(1 - \frac{y^2}{2}\right) - \{\text{Términos con gr}> 2\} = \\ = 4 + 4(x-2) + (x-2)^2 - 2y^2 = \\ = 4 + 4(x-2) + \frac{1}{2}(x-2\ y)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

——

Ejercicios básicos

1. Consideramos el plano $3x - 2y + z = 0$:

   a) Descríbalo mediante ecuaciones paramétricas.

   b) Halle la ecuación del plano paralelo que pasa por el punto $(1, 0, -1)$.

   c) Determine la recta perpendicular al plano que pasa por el punto $(1, 0, -1)$.

2. Dados dos vectores $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$, definimos su *producto vectorial* como:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_2 & \mathrm{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

   Este vector verifica que $\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\| \operatorname{sen} \alpha$, en donde α es el ángulo formado por los dos vectores; además, $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ es perpendicular a $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$.

   a) Calcule $(-2, 2, 1) \times (-1, 1, 1)$ y $(-1, 1, 1) \times (-2, 2, 1)$.

   b) Utilice el producto vectorial para determinar la ecuación del plano con vectores directores $(1, 1, 0)$ y $(2, 0, -1)$ y que pasa por el punto $(1, 1, 1)$.

3. Halle la ecuación del plano que pasa por los puntos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$ si a, b y c son distintos de 0.

4. Determine el dominio de los siguientes campos:

   a) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

   b) $f(x, y) = \log \dfrac{y}{x^2 + y^2 - 1}$

5. Describa las curvas de nivel de los siguientes campos escalares

   a) $f(x, y) = y + \cos 2x$ *b*) $f(x, y) = \mathrm{e}^{y - x^2}$

6. Utilice la definición para calcular $\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a})$, en donde

$$f(x, y) = x^2 \mathrm{e}^{xy}, \quad \boldsymbol{a} = (3, 0), \quad \boldsymbol{v} = (3, -2)$$

   Utilice igualmente la definición para determinar el vector $\nabla f(\boldsymbol{a})$.

7. Halle el vector gradiente de los siguientes campos.

   a) $h(x, y) = \log(\operatorname{sen} xy)$ *b*) $g(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$

8. Calcule la tasa de cambio puntual del campo $f(x,y) = x^3 + 3xy$ en el punto $(1,1)$ a lo largo de la recta $y = x$ y en la dirección de decrecimiento de x.

9. Encuentre las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal al grafo del campo $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x+y}$ en el punto $(2,2,1)$.

10. Para $w = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $x = \cosh t$, $y = \operatorname{senh} t$, halle $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ expresando w explícitamente como función de t y derivando. Halle la derivada igualmente utilizando la regla de la cadena.

11. Use la diferencial para aproximar:

$$\sqrt{2'95^2 + 4'01^2}, \quad \text{y} \quad 2'03^2 \cos(-0,05)$$

12. Encuentre las ecuaciones del plano tangente y la recta normal a la superficie $x \operatorname{sen} y + x^2 \mathrm{e}^z = 4$ en el punto $(2,\pi,0)$.

13. Pruebe que las superficies

$$x^2 - 2y^2 + z^2 = 0 \qquad \text{y} \qquad xyz = 1$$

son ortogonales en todos los puntos de intersección. Es decir, las rectas normales a las curvas en estos puntos son ortogonales.

14. Determine en qué puntos la expresión $z^3 + 3x^2 z - xy = 0$ define a z como función de (x,y) y calcule en tal caso $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Utilice estas parciales para hallar el plano tangente a la superficie en el punto $(1,4,1)$.

15. Dado que el polinomio $f(x,y) = 2 - x + 2y - 3xy + 2y^2 - x^2$ tiene grado 2, coincide con su polinomio de Taylor de orden 2. Halle, "sin derivar", el gradiente de f y la matriz hessiana en los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$.

16. Utilice la proposición 4.1.19 para determinar el polinomio de Taylor de $f(x,y) = xy - \exp(x+y)$ de orden 2 en el punto $(0,0)$.

17. Use el polinomio de Taylor de orden 2 para aproximar:

$$\sqrt{2'95^2 + 4'01^2}, \quad \text{y} \quad 2'03^2 \cos(-0,05)$$

LECCIÓN 4.2

Optimización de campos escalares

Una de las aplicaciones del concepto de diferenciabilidad es el resolver problemas de *optimización*, es decir, encontrar los valores máximos y mínimos de una magnitud definida a partir de uno o varios parámetros. Estos problemas se resuelven fácilmente si la magnitud solo depende de un parámetro, utilizando las derivadas de orden superior de la función de una variable determinada por el problema. El objetivo de esta lección es generalizar esta técnica a campos escalares, es decir, optimizar magnitudes (escalares) que dependen de varios parámetros.

4.2.1. Extremos de campos escalares

Empezamos introduciendo las definiciones básicas que utilizaremos a lo largo de la lección.

DEFINICIÓN 4.2.1 *Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ se dice que está* acotado *si existen $r > 0$ y $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tales que $D \subset B(\boldsymbol{x}, r)$.*

A partir de la definición de entorno (ver definición 4.1.9), los conceptos de conjunto abierto y conjunto cerrado se establecen igual que en $\mathbb{R}$: un conjunto D se dice que es *abierto*, si es entorno de todos sus puntos; decimos que D es *cerrado*, si su complementario es abierto.

Sabemos que, para las funciones de una variable, una función continua y acotada en un dominio *cerrado* siempre alcanza un valor máximo y un valor mínimo en tal dominio. Esta propiedad también se verifica para campos escalares, según establecemos a continuación.

TEOREMA 4.2.2 *Sea f un campo escalar continuo y A un subconjunto cerrado y acotado del dominio de f. Entonces existen $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1 \in A$ tales que $f(\boldsymbol{x}_0) \leq f(x) \leq f(\boldsymbol{x}_1)$ para todo $\boldsymbol{x} \in A$.*

Es decir, $f(\boldsymbol{x}_0)$ es el valor mínimo que toma el campo en el conjunto A y $f(\boldsymbol{x}_1)$ es el valor máximo. En tal caso, decimos que $\boldsymbol{x}_0$ es el punto mínimo y $\boldsymbol{x}_1$ es el punto máximo.

Igual que en el caso real, para determinar los máximos y mínimos de un campo debemos empezar por determinar los máximos y mínimos locales o relativos, es decir, los máximos y mínimos respecto de los puntos cercanos a él.

Definición 4.2.3

1. $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tiene un* máximo local (o relativo) *en* $\boldsymbol{a} \in D$ *si existe* $r > 0$, *tal que* $f(\boldsymbol{a}) \geq f(\boldsymbol{x})$ *para todo* $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, r) \cap D$.

2. $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tiene un* mínimo local (o relativo) *en* $\boldsymbol{a} \in D$ *si existe* $r > 0$, *tal que* $f(\boldsymbol{a}) \leq f(\boldsymbol{x})$ *para todo* $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, r) \cap D$.

Utilizaremos la denominación genérica de *extremo* para referirnos a un punto que sabemos que es máximo o mínimo. El siguiente teorema justifica la definición de puntos críticos, entre los cuales encontramos los extremos locales de un campo.

Teorema 4.2.4 *Si* $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es un campo escalar diferenciable y* $\boldsymbol{a} \in D$ *es un extremo local de* f, *entonces* $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$*; es decir, todas las derivadas parciales de* f *en* $\boldsymbol{a}$ *son nulas.*

Gráficamente, para funciones de una variable sabemos que la recta tangente al grafo de la función en un extremo son paralelas al eje OX. Si $n = 2$ también obtenemos una propiedad parecida, ya que si $\nabla f(a_1, a_2) = (0, 0)$, entonces el plano tangente al grafo en el punto (a_1, a_2) es perpendicular al vector $(0, 0, -1)$, es decir, es paralelo al plano XY.

Ejemplo 4.2.1

1. Para el campo $f(x, y) = x^2 + y^2$ se verifica que $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$ y por lo tanto, su único punto crítico es $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Es fácil razonar que este punto es mínimo del campo:

$$x^2 + y^2 \geq 0 = f(0, 0)$$

2. Para el campo $f(x, y) = x^2 - y^2$ se verifica que $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$ y por lo tanto, su único punto crítico es $(x_0, y_0) = (0, 0)$. En este caso, el punto no es un extremo ya que $f(0, 0) = 0$ y $f(x, 0) = x^2 > 0$ para todo $x \neq 0$ y $f(0, y) = -y^2 < 0$ para todo $y \neq 0$. ——

En el ejemplo anterior, observamos que el recíproco del teorema 4.2.4 no es cierto, es decir, que el gradiente sea nulo no asegura que ese punto sea un extremo. Los puntos en los cuales el vector gradiente es nulo se denominan *puntos críticos* y los puntos críticos que no son extremos locales se denominan *puntos silla.*

Del teorema 4.2.4 se deduce el primer paso para determinar los extremos locales de un campo escalar: *debemos localizar los puntos críticos y aquellos*

puntos en los que el campo no es diferenciable,[3] ya que entre ellos estarán todos los extremos. El siguiente paso es clasificar estos puntos, es decir, determinar cuáles son máximos, cuáles mínimos y cuáles no son extremos. Esta clasificación se puede hacer comparando el valor de la función en el punto con los valores de la función en los puntos cercanos; aunque no siempre será sencillo, en muchas ocasiones, será la única forma de hacerlo. Para clasificar los puntos críticos, podemos utilizar el siguiente teorema, consecuencia del desarrollo de Taylor de la lección anterior, y análogo al criterio de la derivada segunda para funciones de una variable.

Criterio de la hessiana. Para la funciones reales, el primer paso para clasificar los puntos críticos era estudiar el signo de la derivada segunda. En el caso de los campos escalares, este estudio lo haremos a partir de la matriz hessiana.

TEOREMA 4.2.5 *Sea $\boldsymbol{a} \in D$ un punto crítico del campo $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ y consideremos la segunda diferencial de f en $\boldsymbol{a}$, $\mathrm{d}^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}^t \nabla^2 f(\boldsymbol{a}) \boldsymbol{u}$.*

1. *Si $\mathrm{d}^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}) > 0$ para todo $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ (es decir, $\mathrm{d}^2 f_{\boldsymbol{a}}$ es* definida positiva*), entonces $\boldsymbol{a}$ es un mínimo local de f.*
2. *Si $\mathrm{d}^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}) < 0$ para todo $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ (es decir, $\mathrm{d}^2 f_{\boldsymbol{a}}$ es* definida negativa*), entonces $\boldsymbol{a}$ es un máximo local de f.*
3. *Si $\mathrm{d}^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}_1) > 0$ y $\mathrm{d}^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}_2) < 0$ para algún $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \neq \boldsymbol{0}$ (es decir, $\mathrm{d}^2 f_{\boldsymbol{a}}$ es* indefinida*), entonces $\boldsymbol{a}$ es un punto silla de f.*

En cualquier otro caso, no considerado en el teorema, ***no podemos deducir nada***; es decir, si la forma cuadrática es 0 en algunos vectores y positiva en el resto (semidefinida positiva), o bien si es 0 en algunos vectores y negativa en el resto (semidefinida negativa).

Para analizar el signo de la forma cuadrática, es suficiente con dar una expresión para la misma en terminos de sumas y diferencias de cuadrados, lo cual conseguiremos utilizando la técnica de compleción de cuadrados que hemos aprendido en los temas anteriores.

EJEMPLO 4.2.2 Vamos a hallar y clasificar los puntos críticos del campo $f(x, y) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$:

$$\nabla f(x, y) = (4x - y - 3, -x - 6y + 7)$$

[3] Debemos incluir los puntos en donde la función no es diferenciable porque a ellos no le podemos aplicar el teorema. Sin embargo, a lo largo del tema solo trabajaremos con funciones cuyos extremos se alcanzan en puntos en donde la función es diferenciable.

El puntro crítico es la solución del sistema

$$\begin{aligned} 4x - y - 3 &= 0 \\ -x - 6y + 7 &= 0, \end{aligned}$$

es decir, $(x_0, y_0) = (1, 1)$. La matriz hessina del campo es:

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

Y la segunda diferencial es:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2 f_{(1,1)}(u_1, u_2) &= (u_1 \ u_2) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= 4u_1^2 - 2u_1u_2 - 6u_2^2 = (2u_1 - \frac{1}{2}u_2)^2 - \frac{1}{4}u_2^2 - 6u_2^2 \\ &= (2u_1 - \frac{1}{2}u_2)^2 - \frac{25}{4}u_2^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathrm{d}^2 f_{(1,1)}(u_1, 0) = 4u_1^2 > 0$ y $\mathrm{d}^2 f_{(1,1)}(u_1, u_2) = -\frac{25}{4}u_2^2 < 0$, si $2u_1 = \frac{1}{2}u_2$. En consecuencia, el punto $(1, 1)$ es un punto silla. ——

Utilizando el método de compleción de cuadrados como en este ejemplo, siempre es posible expresar la forma cuadrática como:

$$\mathrm{d}^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}) = a_1\lambda_1(\boldsymbol{u})^2 + \cdots + a_n\lambda_n(\boldsymbol{u})^2,$$

en donde cada λ_i es una forma lineal. A partir de ahí, deducimos que:

1. Si los n coeficientes a_i son estrictamente positivos, la forma cuadrática es definida positiva y estará asociada a un mínimo.
2. Si los n coeficientes son estrictamente negativos, la forma cuadrática es definida negativa y estará asociada a un máximo.
3. Si algún coeficiente es positivo y otro es negativo, la forma cuadrática es indefinida y estará asociada a un punto silla.
4. En los demás casos (algún coeficiente es nulo y los demás son o todos positivos o todos negativos), la forma es semidefinida y ***no podemos deducir nada*** sobre el punto al que está asociada.

Ejemplo 4.2.3 Supongamos que la matriz hessiana de un campo f en un punto crítico $\boldsymbol{a}$ es

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

La segunda diferencial en ese punto es la forma cuadrática siguiente:

$$\mathrm{d}^2 f_{\boldsymbol{a}}(x,y,z,t) = (x\ y\ z\ t)\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$
$$= 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + t^2 + 4xy + 6xz + 2xt + 6yz + 2yt + 6zt$$

Empezamos por la variable x y multiplicamos y dividimos por el coeficiente del cuadrado de esta variable para obtener coeficientes más simples. A continuación empezamos la transformación consiguiendo que todos los sumandos donde aparece x pertenezcan a un cuadrado:

$$\begin{aligned} &2x^2 + 2y^2 + z^2 + 3t^2 + 4xy + 6xz + 2xt + 6yz + 2yt + 6zt = \\ &\quad = \frac{1}{2}(\underline{4x^2} + 4y^2 + 2z^2 + 6t^2 + \underline{8xy} + \underline{12xz} + \underline{4xt} + 12yz + 4yt + 12zt) \\ &\quad = \frac{1}{2}\big(\underline{(2x+2y+3z+t)^2 - 4y^2 - 9z^2 - t^2 - 12yz - 4yt - 6zt} \\ &\qquad\qquad + 4y^2 + 2z^2 + 6t^2 + 12yz + 4yt + 12zt\big) \\ &\quad = \frac{1}{2}\big((2x+2y+3z+t)^2 - 7z^2 + 5t^2 + 6zt\big) \end{aligned}$$

En este primer paso, hemos conseguido que tanto la variable x como y queden dentro del cuadrado, así que continuamos con la variable z.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\big((2x+2y+3z+t)^2 - \frac{1}{7}(\underline{49z^2} - 35t^2 - \underline{42zt})\big) \\ &= \frac{1}{2}\big((2x+2y+3z+t)^2 - \frac{1}{7}(\underline{(7z-3t)^2 - 9t^2} - 35t^2)\big) \\ &= \frac{1}{2}\big((2x+2y+3z+t)^2 - \frac{1}{7}((7z+3t)^2 - 44t^2)\big) \\ &= \frac{1}{2}(2x+2y+3z+t)^2 - \frac{1}{14}(7z+3t)^2 + \frac{22}{7}t^2) \end{aligned}$$

Aunque solamente tenemos tres sumandos, debemos considerarlos como cuatro, es decir, los coeficientes obtenidos son $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{14}$, $\frac{22}{7}$ y también 0. En consecuencia, la forma es indefinida y el punto $\boldsymbol{a}$ no es extremo. ——

Método alternativo. En los casos en los que la forma cuadrática asociada a un punto crítico no determine su condición de extremo o punto silla, solo nos quedará comparar el valor del campo en el punto crítico con los valores a su alrededor. Dependiendo de la expresión del campo, esto puede ser bastante complicado. El siguiente resultado nos da un método alternativo para hacer esta comparación, en él utilizamos las funciones

$$f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{v}}(t) = f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v})$$

que introdujimos para definir las derivadas direccionales.

TEOREMA 4.2.6 *Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $\boldsymbol{a} \in D$. Entonces:*

1. *$\boldsymbol{a}$ es mínimo local de f si y solo si existe un número real $\varepsilon > 0$ tal que 0 es mínimo* absoluto *de todas las funciones $f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}}$, con $\|\boldsymbol{u}\| = 1$, sobre el intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$.*
2. *$\boldsymbol{a}$ es máximo local de f si y solo si existe un número real $\varepsilon > 0$ tal que 0 es máximo* absoluto *de todas las funciones $f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}}$, con $\|\boldsymbol{u}\| = 1$, sobre el intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$.*

Una de las ventajas de este resultado está en que "reduce" el estudio de extremos locales de campos escalares al estudio de extremos de funciones de una variable. Sin embargo, la aplicación de este teorema en la práctica no siempre será sencilla, ya que, por un lado, las funciones $f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}}$ dependen de $n-1$ parámetros y además, necesitamos encontrar un valor de ε para que "todas" las funciones tengan a $f(\boldsymbol{a})$ como valor extremo absoluto en $(-\varepsilon, \varepsilon)$. El siguiente corolario recoge algunas consecuencias del teorema anterior cuya aplicación práctica es más simple de manejar.

COROLARIO 4.2.7 *Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $\boldsymbol{a} \in D$:*

1. *Si 0 no es extremo local $f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}_0}$, entonces $\boldsymbol{a}$ no es extremo local de f.*
2. *Si 0 es máximo local $f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}_1}$ y mínimo local $f_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}_2}$, entonces $\boldsymbol{a}$ no es extremo local de f.*

EJEMPLO 4.2.4 Vamos a clasificar los puntos críticos de $f(x,y) = x^3 + y^3$.

$$\mathrm{D}_1 f(x,y) = 3x^2 \qquad \mathrm{D}_2 f(x,y) = 3y^2$$

Por tanto, el único punto crítico es $(0,0)$.

$$\mathrm{D}_{11} f(x,y) = 6x \qquad \mathrm{D}_{21} f(x,y) = 0 \qquad \mathrm{D}_{22} f(x,y) = 6y$$

Por tanto, la matriz hessiana de f en $(0,0)$ es $\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y la forma cuadrática asociada es nula, por lo que no obtenemos información sobre la condición del punto crítico. Consideremos la función:

$$g(t) = f_{(0,0),(0,1)}(t) = f(0,t) = t^3$$

La tercera derivada de g en $t = 0$ es 6, y por lo tanto, g tiene un punto de inflexión en 0. Por el apartado 1 del corolario 4.2.7, concluimos que el punto $(0,0)$ es un punto silla de f. ——

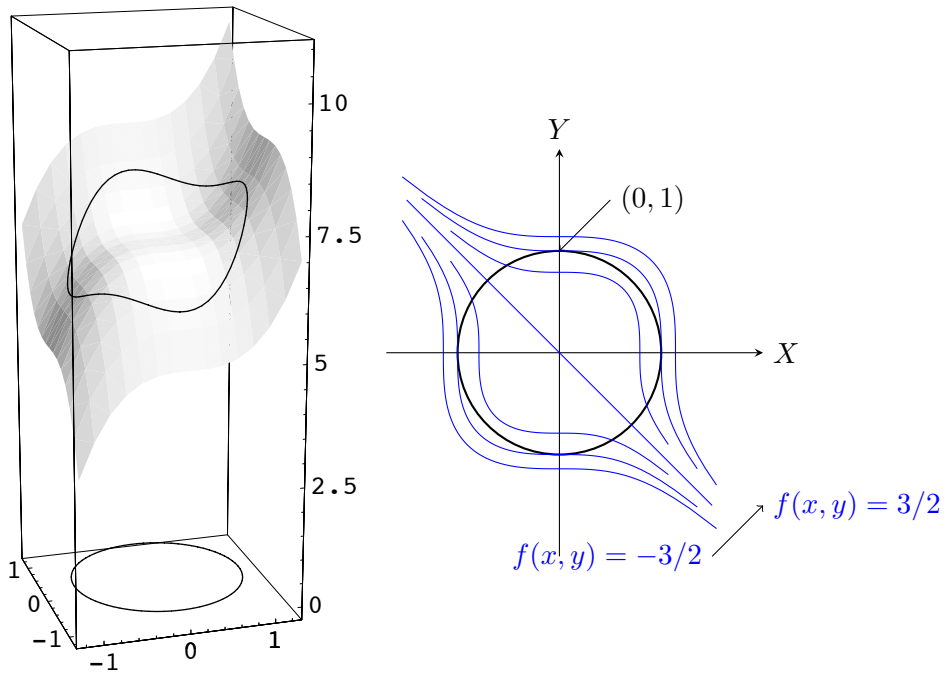


Figura 4.7: Representaciones de $f(x, y) = x^3 + y^3$ sobre $x^2 + y^2 = 1$.

4.2.2. Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange

En la sección anterior hemos afrontado el problema de hallar los extremos locales de un campo escalar, es decir, los extremos sobre *subconjuntos abiertos* dentro del dominio del campo. Sin embargo, en muchas ocasiones nos interesará estudiar los extremos sobre conjuntos cuyo interior es vacío; por ejemplo, estudiar los extremos de un campo sobre $\mathbb{R}^2$ restringiéndonos a una circunferencia. Esta es la situación que abordamos en esta sección; concretamente, nos planteamos el siguiente problema: encontrar los extremos del campo $f(x_1, \ldots, x_n)$ sobre un conjunto S definido a partir de k campos escalares $g_i(x_1, \ldots, x_n)$:

$$S = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0,\ 1 \leq i \leq k\}$$

Más brevemente, enunciamos el problema diciendo: *encontrar los extremos del campo escalar f con las condiciones o restricciones $g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$, para cada i tal que $0 \leq i \leq k$.*

En el ejemplo 4.2.4 hemos visto que el campo $f(x, y) = x^3 + y^3$ no tiene extremos locales, es decir, el campo no alcanza ni máximo ni mínimo sobre ningún conjunto abierto. Sin embargo, en la figura 4.7, podemos apreciar que

si restringimos el campo a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, entonces sí aparecen varios extremos.

En el lado derecho de la misma figura 4.7, vemos la representación del mismo campo, pero mediante las curvas de nivel para $-3/2$, -1, $-1/2$, 0, $1/2$, 1 y $3/2$; también representamos la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ sobre la que queremos optimizar el campo. Si nos fijamos por ejemplo en el punto $(0, 1)$ de la circunferencia, observamos que la circunferencia y la curva de nivel que pasa por este punto son tangentes. Si analizamos los valores del campo según nos desplazamos sobre la circunferencia desde algún punto a la izquierda del punto $(0, 1)$ hasta algún punto a su derecha, observamos que hasta llegar al $(0, 1)$ cortamos curvas de nivel correspondientes a valores crecientes del campo, y a partir de $(0, 1)$ cortamos curvas de nivel correspondientes a valores decrecientes del campo. Por lo tanto, podemos afirmar que $(0, 1)$ es un máximo (local) de f sobre la circunferencia.

Este ejemplo, que más adelante completaremos analíticamente, motiva el siguiente resultado que afirma que los candidatos a extremos están entre los puntos tales que el conjunto de la restricción y la curva o superficie de nivel son tangentes.

TEOREMA 4.2.8 *Sean $f, g_1, \ldots, g_k \colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ campos escalares diferenciables y con derivadas parciales continuas. Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ cuyos puntos verifican las condiciones:*

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad \textit{para todo } i$$

Entonces se verifica que: si $\boldsymbol{x_0}$ es un extremo local de f restringida a S, y $\{\nabla g_i(\boldsymbol{x_0}) \mid 1 \leq i \leq k\}$ es un sistema de vectores no nulos linealmente independientes,[4] *entonces existen números reales μ_i tales que*

$$\nabla f(\boldsymbol{x_0}) = \mu_1 \nabla g_1(\boldsymbol{x_0}) + \cdots + \mu_k \nabla g_k(\boldsymbol{x_0})$$

A las constantes $\mu_1, \ldots, \mu_k$ se las denomina multiplicadores de Lagrange *asociados a $\boldsymbol{x_0}$.*

Este teorema nos da el primer paso a seguir para la determinación de los extremos condicionados:

- Los extremos locales del campo f con las restricciones $g_1 = 0, \ldots g_k = 0$, se encuentran entre los puntos $(x_1, \ldots, x_n)$ cuyas coordenadas son

[4] La condición "$\{\nabla g_i(\boldsymbol{x_0}) \mid 1 \leq i \leq k\}$ es un sistema de vectores no nulos linealmente independientes", exigida en el teorema, se traduce en la práctica a observar que el problema está bien planteado, es decir, que no hay condiciones superfluas, y que estas están dadas *de la mejor forma posible.*

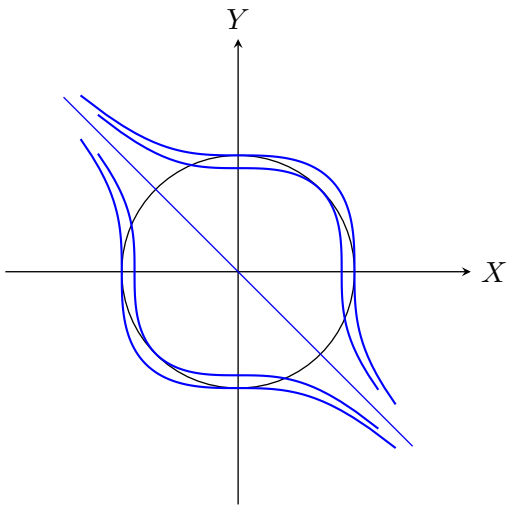


Figura 4.8: Puntos críticos del ejemplo 4.2.5.

solución del sistema:

$$\begin{aligned}
&g_1(x_1,\ldots,x_n)=0\\
&\quad\cdots\\
&g_k(x_1,\ldots,x_n)=0\\
&\mathrm{D}_1 f(\boldsymbol{x})=\mu_1\mathrm{D}_1 g_1(\boldsymbol{x})+\cdots+\mu_k\mathrm{D}_1 g_k(\boldsymbol{x})\\
&\quad\cdots\\
&\mathrm{D}_n f(\boldsymbol{x})=\mu_1\mathrm{D}_n g_1(\boldsymbol{x})+\cdots+\mu_k\mathrm{D}_n g_k(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

Si $x_1,\ldots,x_n,\mu_1,\ldots,\mu_k$ es una solución del sistema, $(x_1,\ldots,x_n)$ se denomina *punto crítico* de f con las restricciones g_i, y $\mu_1,\ldots,\mu_k$ son sus multiplicadores de Lagrange asociados.

Ejemplo 4.2.5 Vamos a encontrar los puntos críticos del problema de extremos condicionados de la figura 4.7:

$$f(x,y)=x^3+y^3,\qquad g(x,y)=x^2+y^2-1=0.$$

El sistema de ecuaciones que tenemos que resolver es:

$$\begin{aligned}
0&=x^2+y^2-1\\
3x^2&=2x\mu\\
3y^2&=2y\mu
\end{aligned}$$

De la segunda ecuación obtenemos que $x=0$ o bien $3x=2\mu$. En el primer caso obtenemos, con la primera ecuación las posibilidades $y=1$ o $y=-1$. Con la condición $3x=2\mu$, utilizando la tercera ecuación, obtenemos que $y=0$ o

bien $y = x$ y de ahí, utilizando la primera ecuación deducimos los valores para x. De esta forma, calculamos todos los puntos críticos y sus correspondientes multiplicadores:

$$\begin{aligned}(0,1) &\to \mu = 3/2\\ (1,0) &\to \mu = 3/2\\ (0,-1) &\to \mu = -3/2\\ (-1,0) &\to \mu = -3/2\\ (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) &\to \mu = 3\sqrt{2}/4\\ (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) &\to \mu = -3\sqrt{2}/4\end{aligned}$$

En la figura 4.8 aparecen representadas las cuatro curvas de nivel tangentes a la restricción. Obsérvese que el número de curvas de nivel tangentes coincide con el número de multiplicadores distintos. ——

Los casos particulares más simples sobre los que aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange son los siguientes.

- Si $n = 2$ y $k = 1$, las curvas de nivel y la restricción son curvas. Estas son tangentes si sus rectas tangentes son iguales, es decir, si sus vectores normales son paralelos: $\nabla f = \mu \cdot \nabla g$. (Ver parte izquierda de la figura 4.9).
- Si $n = 3$ y $k = 1$, el campo a optimizar se representa por superficies de nivel y la restricción también describe una superficie. Como en el caso anterior, las superficies son tangentes si sus planos tangentes son iguales, es decir, los vectores normales son paralelos: $\nabla f = \mu \cdot \nabla g$.
- Si $n = 3$ y $k = 2$, el campo a optimizar se representa por superficies de nivel; la restricción viene dada por la intersección de dos superficies, es decir, una curva en $\mathbb{R}^3$. La curva es tangente a una superficie de nivel si la recta tangente a la primera esta contenido en el plano tangente a la superficie. Es decir, la recta normal a la superficie está contenida en el plano normal a la curva: $\nabla f = \lambda \cdot \nabla g_1 + \mu \cdot \nabla g_2$. (Ver parte derecha de la figura 4.9).

Igual que para los extremos no condicionados, después de calcular los puntos críticos, el problema será decidir cuáles son máximos, cuáles mínimos y cuáles no son extremos. Para ello, recurrimos igualmente a la segunda derivada, es decir, a la matriz hessiana tal y como recoge el siguiente resultado.

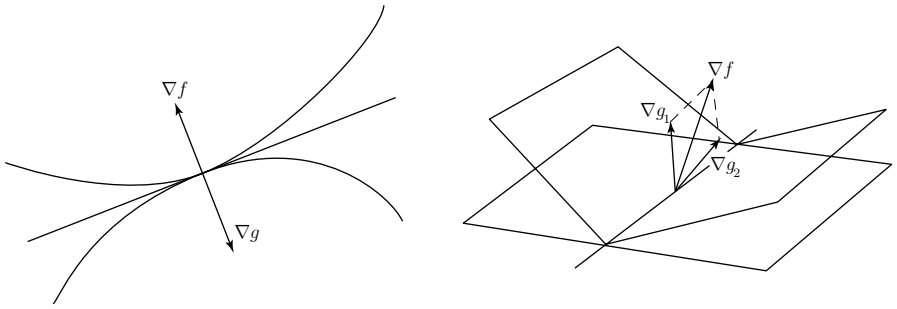


Figura 4.9: Relación entre gradientes en el método de los multiplicadores de Lagrange.

TEOREMA 4.2.9 *Sea $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ un punto crítico de f con las restricciones g_i, $1 \leq i \leq k$, y $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ sus multiplicadores de Lagrange; consideremos el campo $F\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definido por*

$$F(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - \alpha_1 g_1(\boldsymbol{x}) - \cdots - \alpha_k g_k(\boldsymbol{x});$$

sea T el espacio vectorial tangente a S en $\boldsymbol{a}$ (la dimensión del subespacio T es $n-k$).

1. *Si $\mathrm{d}^2 F_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}) > 0$ para todo $\boldsymbol{u} \in T$, $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$, entonces $\boldsymbol{a}$ es punto mínimo.*
2. *Si $\mathrm{d}^2 F_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}) < 0$ para todo $\boldsymbol{u} \in T$, $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$, entonces $\boldsymbol{a}$ es punto máximo.*
3. *Si $\mathrm{d}^2 F_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u_1}) > 0$ para algún $\boldsymbol{u_1} \in T$, $\boldsymbol{u}_1 \neq \boldsymbol{0}$, y $\mathrm{d}^2 F_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u_2}) < 0$ para algún $\boldsymbol{u_2} \in T$, $\boldsymbol{u}_2 \neq \boldsymbol{0}$, entonces $\boldsymbol{a}$ no es extremo.*
4. *En cualquier otro caso, **no podemos deducir nada**.*

Es decir, para determinar la naturaleza de un punto crítico $\boldsymbol{a}$ tenemos que estudiar el signo de la forma cuadrática $\mathrm{d}^2 F_{\boldsymbol{a}}$ restringida al subespacio T.

EJEMPLO 4.2.6 Continuando con el ejemplo 4.2.5, vamos a clasificar los puntos críticos $(0,1)$ y $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ (el resto de los puntos se clasifican de forma similar).

En primer lugar, recordemos que, por el teroema 4.1.15, el espacio vectorial tangente a la curva $g(x,y) = 0$ en un punto (x_0, y_0) es:

$$\begin{aligned} \nabla g(x_0, y_0) \cdot (u_1, u_2) &= 0 \\ (2x_0, 2y_0) \cdot (u_1, u_2) &= 0 \\ 2x_0 u_1 + 2y_0 u_2 &= 0 \\ x_0 u_1 + y_0 u_2 &= 0 \end{aligned}$$

Para $(x_0, y_0) = (0, 1)$, los vectores tangentes verifican que $u_2 = 0$, es decir, son de la forma $(u_1, 0)$. Para $(x_0, y_0) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, los vectores tangentes verifican $\sqrt{2}/2(u_1 + u_2) = 0$, es decir, son de la forma $(u_1, -u_1)$.

Para estudiar el punto $(0, 1)$, utilizamos el campo

$$\begin{aligned} F(x, y) &= x^3 + y^3 - \frac{3}{2}(x^2 + y^2 - 1) \\ \nabla F(x, y) &= (3x^2 - 3x, 3y^2 - 3y) \\ \nabla^2 F(x, y) &= \begin{pmatrix} 6x - 3 & 0 \\ 0 & 6y - 3 \end{pmatrix} \\ \nabla^2 F(0, 1) &= \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para clasificar el punto $(0, 1)$, estudiamos la forma cuadrática $\mathrm{d}^2 F_{(1,0)}$ determinada por la hessiana anterior sobre los vectores tangentes a $x^2 + y^2 - 1$ en el punto $(0, 1)$, que según hemos visto arriba son $(u_1, 0)$:

$$\mathrm{d}^2 F_{(0,1)}(u_1, 0) = (u_1 \ 0) \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} = -3u_1^2 < 0$$

En consecuencia, $(0, 1)$ es un máximo local.

Para estudiar el punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, utilizamos el campo

$$\begin{aligned} G(x, y) &= x^3 + y^3 - \frac{3\sqrt{2}}{4}(x^2 + y^2 - 1) \\ \nabla G(x, y) &= \left(3x^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}x, 3y^2 - \frac{3\sqrt{2}}{y}\right) \\ \nabla^2 G(x, y) &= \begin{pmatrix} 6x - \frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 6y - \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\ \nabla^2 G(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) &= \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para clasificar el punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, estudiamos la forma cuadrática $\mathrm{d}^2 G_{(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)}$ sobre los vectores tangentes a $x^2 + y^2 - 1$ en el punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, que según hemos visto arriba son $(u_1, -u_1)$:

$$\mathrm{d}^2 G_{(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)}(u_1, -u_1) = (u_1 \ -u_1) \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ -u_1 \end{pmatrix} = \frac{3\sqrt{2}}{2} u_1^2 > 0$$

En consecuencia, $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ es un mínimo local. ____

EJEMPLO 4.2.7 Vamos a estudiar ahora los extremos del campo $f(x,y,z) = x^2 + 2y - z^2$ sujeto a las restricciones $2x - y = 0$ e $y + z = 0$.

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = x^2 + 2y - z^2 &\quad\Rightarrow\quad \nabla f(x,y,z) = (2x, 2, -2z) \\ g_1(x,y,z) = 2x - y &\quad\Rightarrow\quad \nabla g_1(x,y,z) = (2,-1,0) \\ g_2(x,y,z) = y + z &\quad\Rightarrow\quad \nabla g_2(x,y,z) = (0,1,1) \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones que determina los puntos críticos es:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ y + z &= 0 \\ 2x &= 2\lambda \\ 2 &= -\lambda + \mu \\ -2z &= \mu \end{aligned}$$

El sistema es simple y es fácil deducir que el único punto crítico es:

$$\boldsymbol{a} = (2/3, 4/3, -4/3), \quad \lambda = 2/3, \quad \mu = 8/3$$

Para clasificarlo, observemos en primer lugar que los vectores tangentes a la curva dada por la intersección de $g_1(x,y,z) = 0$ y $g_2(x,y,z) = 0$ deben ser perpendiculares a los vectores gradientes de g_1 y g_2, y por lo tanto son paralelos a

$$\nabla g_1(x,y,z) \times \nabla g_2(x,y,z)$$

Para el punto crítico calculado, obtenemos:

$$\nabla g_1(2/3,4/3,-4/3) \times \nabla g_2(2/3,4/3,-4/3) = (2,-1,0) \times (0,1,1) =$$
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 = (-1,-2,2)$$

y por lo tanto, los vectores tangentes son de la forma $(-u, -2u, 2u)$.

Ya podemos construir el campo F y determinar el signo de la forma

cuadrática asociada a su hessiana.

$$F(x,y,z) = x^2 + 2y - z^2 - \frac{2}{3}(2x-y) - \frac{8}{3}(y+z)$$
$$\nabla F(x,y,z) = (2x - \frac{4}{3}, 0, -2z - \frac{8}{3})$$
$$\nabla^2 F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{d}^2 F_{\boldsymbol{a}}(-u,-2u,2u) = (-u \ -2u \ 2u) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u \\ -2u \\ 2u \end{pmatrix} =$$
$$= 2u^2 - 8u^2 = -6u^2 < 0$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{a} = (2/3, 4/3, -4/3)$ es un máximo local. ____

Método alternativo. Una forma alternativa de resolver el problema del cálculo de los extremos condicionados es reduciendo las variables del campo a partir de las restricciones.

Ejemplo 4.2.8 Vamos a repetir el ejemplo 4.2.7 utilizando este método. Para calcular los extremos de $f(x,y,z) = x^2 + 2y - z^2$ sujeto a las restricciones $2x - y = 0$ e $y + z = 0$, podemos reducir las variables y y z,

$$y = 2x$$
$$z = -y = -2x,$$

de forma que el problema es equivalente a obtener los extremos de la función de una variable

$$g(x) = f(x, 2x, -2x) = x^2 + 4x - 4x^2 = -3x^2 + 4x.$$

Para esta función podemos aplicar las técnicas de optimización de funciones de una variable:

$$g(x) = -3x^2 + 4x$$
$$g'(x) = -6x + 4$$
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2/3$$
$$g''(x) = -6$$
$$g''(2/3) = -6 < 0 \Rightarrow x = 2/3 \text{ es máximo.}$$

Por lo tanto, el punto $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$ es un máximo local del campo g. ____

En este ejemplo, hemos podido reducir las variable porque las hemos despejado sin "perder" ningún punto. Esta condición es imprescindible para poder aplicar el método. En muchos casos, la única forma de trabajar con todos los puntos usando este método será dividir la región en varios trozos, lo que supondrá tener que resolver más de un problema de optimización. Por ejemplo, para estudiar de esta forma el ejemplo 4.2.5 tendríamos que dividir la región en cuatro partes,

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{1-x^2} \\ y &= -\sqrt{1-x^2} \\ x &= \sqrt{1-y^2} \\ x &= -\sqrt{1-y^2}, \end{aligned}$$

y así poder "cubrir" todos los puntos de la circunferencia.

4.2.3. Extremos absolutos

Para concluir la lección, vamos a analizar como tendríamos que resolver un problema en el que necesitemos obtener los extremos absolutos de un campo sobre un conjunto cerrado y acotado C.

En primer lugar, dividimos C en dos conjuntos, $C = U \cup F$, en donde U es el interior de C y F es el resto de sus puntos. Los candidatos a ser extremos absolutos de f sobre C son:

1. Los puntos críticos de f en U y los puntos de no diferenciabilidad.
2. Los puntos críticos de f sobre F que puedan ser obtenidos por el método de los multiplicadores de Lagrange o reduciendo variables.
3. Todos los puntos que no se hallan considerado en los ítemes anteriores.

Para determinar el máximo y el mínimo absoluto, basta con evaluar f sobre todos los puntos anteriores y determinar cuál es el valor máximo y cuál es el valor mínimo.

Ejemplo 4.2.9 Vamos a determinar los extremos absolutos del campo $f(x,y) = xy(1-x^2-y^2)$ en el cuadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ (ver figura 4.10).

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_1 f(x,y,z) = y - 3x^2y - y^3 = 0, \quad & \mathrm{D}_2 f(x,y,z) = x - 3y^2x - x^3 = 0 \\ y(1-3x^2-y^2) = 0, \quad & x(1-3y^2-x^2) = 0 \end{aligned}$$

Dado que buscamos puntos críticos en el interior del cuadrado, entonces $x \neq 0$, $y \neq 0$. A partir de las ecuaciones $1-3x^2-y^2 = 0$ y $1-3y^2-x^2 = 0$, es fácil deducir que $x = 1/2$ e $y = 1/2$.

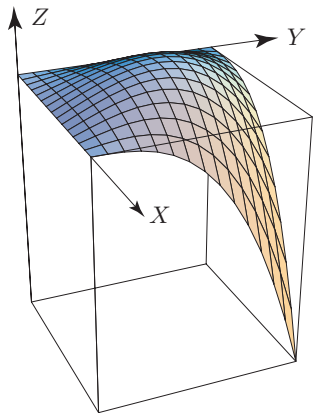


Figura 4.10: Representación del ejemplo 4.2.9.

Ahora hallamos los puntos críticos en los bordes del cuadrado usando la reducción de variables:

- Si $x = 0$, $g_1(y) = f(0, y) = 0$, y debemos de considerar todos los puntos.
- Si $y = 0$, $g_2(x) = f(x, 0) = 0$, y debemos de considerar todos los puntos.
- Si $x = 1$, $g_3(y) = f(1, y) = -y^3$; el único punto crítico es $y = 0$ que queda en el extremo del intervalo.
- Si $y = 1$, $g_4(x) = f(x, 1) = -x^3$; el único punto crítico es $x = 0$ que queda en el extremo del intervalo.

Ahora solo tenemos que evaluar el campo en todos los puntos obtenidos y en los cuatro vértices del cuadrado para decidir cuál es el máximo y cuál el mínimo.

$$\begin{aligned} f(1/2, 1/2) &= 1/8 \\ f(x, 0) &= 0 \\ f(0, y) &= 0 \\ f(1, 1) &= -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(1/2, 1/2)$ es el máximo absoluto y $(1, 1)$ es el mínimo absoluto.

———

Ejercicios básicos

1. Identifique y clasifique (si existen) los puntos críticos de los siguientes campos:

   $a)\ z = x^3 + y^3 - 3xy$ $\qquad$ $b)\ z = x^2y^3(6 - x - y)$

2. Sea $f(x, y) = (3 - x)(3 - y)(x + y - 3)$

   $a)$ Halle los puntos críticos de f y evalúe el campo en ellos.
   Para clasificar los puntos críticos, tenemos que comparar el valor del campo en ellos con el valor del campo en su entorno. Para hacer esto, podemos recurrir al análisis de la expresión del campo, tal y como se indica a continuación.

   $b)$ Dibuje las regiones del plano tales que $f = 0$, $f > 0$ y $f < 0$.

   $c)$ Utilice el apartado anterior para clasificar los puntos críticos.

3. Calcule el valor máximo de $f(x, y, z) = x^2 + 2y - z^2$ sujeto a las restricciones $2x - y = 0$ e $y + z = 0$.

4. Halle los valores extremos del campo escalar $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

5. Lea la sección 4.2.3 y halle el valor máximo y el valor mínimo de $f(x, y) = x^2 - y^2$ en la región $x^2 + y^2 \leq 1$.

6. Lea la sección 4.2.3 y halle los máximos y mínimos absolutos de $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 1$ en la región triangular cerrada del primer cuadrante acotada por las rectas $x = 0$, $y = 4$, $y = x$.

7. Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar las dimensiones de un estanque rectangular abierto cuya superficie sea mínima y su volumen sea V.

8. Halle la ecuación del plano que pasa por el punto $(1, 2, 1)$ y determina con los ejes coordenados un tetraedro de volumen mínimo. Indicación: como ecuación del plano, utilice la ecuación determinada por los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

9. Halle los puntos (x, y) y las direcciones para las que la tasa de cambio puntual de $f(x, y) = 3x^2 + y^2$ en (x, y) es máxima entre los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

Relación de ejercicios (I)

1. Determine el dominio de los siguientes campos:

   a) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4x^2y^2$ *b)* $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

   c) $f(x,y) = \dfrac{1}{y}\cos x^2$ *d)* $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x-y}$

   e) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x}$ *f)* $f(x,y) = \log(1-xy)$

   g) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ *h)* $f(x,y) = \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\operatorname{tg}(x^2-y^2)}$

   i) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ *j)* $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+y}{1-xy}$

2. Describa las curvas de nivel de los siguientes campos y dibuje algunas. Esboce sus gráficas:

   a) $f(x,y) = 2x + y$ *b)* $f(x,y) = \cos(2x+y)$

   c) $f(x,y) = y^2 - x$ *d)* $f(x,y) = \mathrm{e}^{y-x^2}$

   e) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}$ *f)* $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg} y - x$

3. Halle la *derivada direccional* del campo $f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$ en el punto $(1,1,1)$ en la dirección del vector $(2,1,-1)$.

4. Calcule las tasas de cambio puntuales de los siguientes campos en las direcciones indicadas:

   a) $f(x,y) = x^2 + y\,\mathrm{senh}(xy)$ en $(2,0)$ en la dirección de decrecimiento de x y a lo largo de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x+7} - 3$.

   b) $f(x,y,z) = \dfrac{z}{x^2+y^2}$ en $(-1,1,3)$ a lo largo de la curva: $x = -1-2t$, $y = 1+t$, $z = 3+2t$ y en la dirección de decrecimiento de la y.

   c) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2z}{y}$ en $(2,-1,3)$ en la dirección de decrecimiento de la z y a lo largo de la recta normal al plano $x + 2y - 2z = -6$.

5. Halle el vector gradiente de los siguientes campos:

   a) $f(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y$, *b)* $f(x,y,z) = x^{y^z}$, *c)* $f(x,y) = \operatorname{tg}(x^2+y^2)$

6. Para $z = f(t)$, $t = \dfrac{x+y}{xy}$, pruebe que: $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} = y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}$

7. Para el campo $f(r,t) = t^n \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4t}}$, halle un valor de la constante n para que f satisfaga la siguiente ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

8. Encuentre el punto de la superficie $z = xy$ en donde la recta normal es paralela a la recta $x = 3 - 2t$, $y = 4 + 5t$, $z = 3 + 3t$.

9. Encuentre la ecuación del plano o recta tangente a la superficie o curva en el punto indicado, así como la de la recta normal:

   a) $x \operatorname{sen} y + x^2 \mathrm{e}^z = 4$ en $(2, \pi, 0)$, *b)* $x^3 y - \dfrac{x^2}{y} = 4$ en $(2, 1)$

   c) $xz^2 + \dfrac{(2x - z)^2}{y^3} = 19$ en $(2, 1, 3)$, *d)* $3x\mathrm{e}^y + xy^3 = 2 + x$ en $(1, 0)$

10. Encuentre el punto de la superficie $z = x^2 + y^2$ en donde el plano tangente es paralelo al plano $6x - 4y + 2z = 5$.

11. Dado el polinomio $f(x, y) = 1 + x - 3xy - x^2 + 2x^2 y - x^3$, halle "sin derivar" el gradiente de f y la matriz hessiana en los puntos $(0, 0)$ y $(-1, 1)$.

12. Identifique y clasifique (si existen) los puntos críticos de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ll} z = x^2 + (y-1)^2 & z = x^3 - 3xy^2 + y^2 \\ z = x^2 - (y-1)^2 & z = x^2 y^3 (6 - x - y) \\ z = 1 + x^2 - y^2 & z = x^3 + y^3 - 3xy \end{array}$$

13. Aplique el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar las distancias máximas y mínimas de un punto de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ a la recta $x + y = 4$. Indicación: utilice la ecuación de la distancia entre un punto y una recta.

14. En los siguientes apartados, halle los máximos y mínimos absolutos de las funciones en los dominios dados:

   a) $T(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x$ en la placa rectangular $0 \leq x \leq 5$, $-3 \leq y \leq 3$.

   b) $f(x, y) = 48xy - 32x^3 - 24y^2$ en la placa rectangular $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

15. Halle los valores máximo y mínimo del campo $f(x, y) = x^2 - y^2$ en la región $x^2 + y^2 \leq 1$ para $y \geq 0$.

Relación de ejercicios (II)

1. Determine el dominio de los siguientes campos:

   a) $f(x,y) = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *b)* $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   c) $f(x,y) = \operatorname{arc\,cos} \sqrt{\dfrac{x}{y}}$ *d)* $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

   e) $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^3}{x^2+y^2}$ *f)* $f(x,y) = x^{(y^2)}$

   g) $f(x,y) = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{2x-y}{x-y}$ *h)* $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x}$

   i) $f(x,y) = \dfrac{1-\cos\sqrt{xy}}{y}$ *j)* $f(x,y) = \sqrt{\log(y-x+1)}$

   k) $f(x,y) = \operatorname{tg} \dfrac{x^2}{y}$

   l) $f(x,y) = \log((16-x^2-y^2)(x^2+y^2-4))$

2. Calcule las tasas de cambio puntuales de los siguientes campos en las direcciones indicadas:

   a) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}(x^2+y^2)$ en $(1,-2)$ en la dirección de decrecimiento de la y y a lo largo de la recta $y = 3x-5$.

   b) $f(x,y) = x^2 \mathrm{e}^{xy}$ en $(3,0)$ en la dirección de decrecimiento de la x y a lo largo de la recta normal a $3x-2y=9$.

   c) $f(x,y) = x\mathrm{e}^{x+y}$ en $(-3,3)$ en la dirección de decrecimiento de la y y normal a la curva $y = x^2+3x+3$

3. Dada $z = u(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$ y sabiendo que $\mathrm{D}_{12}u = 0$, halle los valores de a y b tales que:

   $$\mathrm{D}_{12}z - \mathrm{D}_1 z - \mathrm{D}_2 z + z = 0$$

4. Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar con las parciales de segundo orden continuas. Llamamos *laplaciana* de f al campo escalar

   $$\Delta f = \mathrm{D}_{11}f + \mathrm{D}_{22}f + \mathrm{D}_{33}f$$

   El operador Δ se denomina *operador de Laplace* y decimos que el campo f es *armónico* si $\Delta f = 0$. Halle la laplaciana de los siguientes campos:

   a) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

   b) $g(x,y,z) = xy+yz+xz$

5. Pruebe que las superficies

   $$x + y^2 + 2z^3 = 4 \qquad \text{y} \qquad 12x - (3\log y) + z^{-1} = 13$$

   son ortogonales en todos los puntos de intersección.

6. Encuentre la ecuación del plano tangente al grafo del campo en el punto indicado, así como la de la recta normal:

   a) $f(x,y) = \operatorname{sen} xy$ en $(1, \pi/2, 1)$, *b)* $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x+y}$ en $(2,2,1)$

   c) $f(x,y) = \log(x^2+y)$ en $(1,0,0)$, *d)* $f(x,y) = x^2 \mathrm{e}^{xy}$ en $(3,0,9)$

7. Encuentre todos los puntos de la superficie $z = x^2 y$ en donde el plano tangente es ortogonal a la recta $x = 2-6t$, $y = 3-12t$, $z = 2+3t$.

8. Determine en qué puntos la expresión $\log(x^2+y^2) - \operatorname{arc\,tg}(y/x) = 0$ define a y como función de x y hallar $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

9. Identifique y clasifique (si existen) los puntos críticos de las siguientes funciones:

   $z = (x-y+1)^2$ $\qquad$ $z = \operatorname{sen} x \cosh y$

   $z = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$ $\qquad$ $z = \mathrm{e}^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$

   $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ $\qquad$ $z = (5x + 7y - 25)\mathrm{e}^{-(x^2+xy+y^2)}$

10. Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar las dimensiones de un paralepípedo rectangular cuyo volumen sea máximo y su superficie total sea S.

11. Halle los valores máximo y mínimo del campo $f(x,y) = x^2 y(4-x-y)$ en el triángulo limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

12. Halle los puntos de la superficie $z^2 - xy = 1$ más próximos al origen.

13. Halle el valor máximo de $w = xyz$ entre todos los puntos pertenecientes a la intersección de los planos $x + y + z = 40$ y $z = x + y$.

TEMA 5

Ecuaciones diferenciales

Objetivos: Los objetivos son: (1) conocer y saber aplicar las técnicas básicas del cálculo de primitivas; (2) conocer y saber aplicar las técnicas básicas para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden; (3) saber identificar los modelos básicos para aplicar el método más adecuado de cálculo de primitiva o de resolución de ecuaciones diferenciales.

Prerrequisitos: Manipulación de expresiones y derivación de funciones y campos escalares.

Contenido:

- Lección 5.1 Cálculo de primitivas. Integrales inmediatas. Teorema de cambio de variable. Teorema de integración por partes. Integración de funciones racionales. Integración de funciones racionales sobre funciones trigonométricas.
- Lección 5.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Definiciones y propiedades. Ecuaciones en variables separadas. Ecuaciones lineales. Ecuaciones exactas. Resolución de ecuaciones mediante cambios de variable. Descripción de curvas mediante ecuaciones diferenciales.

LECCIÓN 5.1

Cálculo de Primitivas

El cálculo de primitivas es una parte del cálculo integral que consiste en buscar una función cuya derivada coincida con una expresión dada. Por esta razón, se dice que el cálculo de primitivas es el proceso inverso a la derivación.

Sin embargo, a diferencia del cálculo de derivadas, el cálculo de primitivas no se rige por unas reglas o fórmulas que permitan obtener el resultado de forma mecánica. Es más, en muchos casos no es posible calcular la primitiva de una expresión en términos de funciones elementales, por ejemplo, para las funciones $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ o $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ se sabe que existen primitivas pero no es posible expresarlas en términos de funciones elementales.

En esta lección veremos los tres métodos básicos de integración (identificación de integrales inmediatas, integración por partes y sustitución) y proporcionaremos las estrategias necesarias para abordar el cálculo de la primitiva de algunos tipos de funciones (racionales, irracionales y trigonométricas).

5.1.1. Primitivas

El cálculo de primitivas es el proceso inverso a la derivación. Consiste en buscar una función cuya derivada sea la original. Por ejemplo, dada la función $f(x) = 3x^2$, el objetivo es encontrar una función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$; en este caso, podemos considerar la función $F(x) = x^3$, pues $F'(x) = 3x^2 = f(x)$.

Definición 5.1.1 *Una función F es una primitiva de f en el intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo x en I.*

Obsérvese que cualquier otra función construida a partir de la función $F(x)$ sumándole una constante también valdría, pues la derivada de cualquier función constante es 0. Así, $F_C(x) = x^3 + C$ es también una primitiva de $f(x) = 3x^2$ ya que $F'_C(x) = 3x^2 = f(x)$.

Proposición 5.1.2 *Si F es una primitiva de f en un intervalo I entonces la función G es primitiva de f si y sólo si G es de la forma:*

$$G(x) = F(x) + C \quad \textit{para todo } x \textit{ en } I$$

donde C es una constante.

Ahora, definimos el concepto de integral indefinida, también llamado antiderivación, que consiste en calcular todas las primitivas de una función.

DEFINICIÓN 5.1.3 *Se llama integral indefinida de la función f al conjunto de todas las primitivas de la función $f(x)$. Esta operación se denota así*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

siendo F una primitiva de f. En esta expresión, $f(x)$ se llama integrando, $\mathrm{d}x$ indica la variable de integración y C se denomina constante de integración.

Para el ejemplo anterior escribimos:

$$\int 3x^2\,\mathrm{d}x = x^3 + C$$

La relación que existe entre los conceptos de derivada y primitiva permite determinar algunas propiedades de esta última como, por ejemplo, la linealidad o comportamiento frente a las operaciones de suma y producto por escalares.

PROPOSICIÓN 5.1.4 *La integral indefinida verifica las siguientes propiedades:*

$$\begin{aligned}\int (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x &= \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x \\ \int k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x &= k\cdot\int f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \textit{para todo } k\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

donde k es una constante.

EJEMPLO 5.1.1 La integral indefinida de la función $15x^2 - 3\operatorname{sen} x$ es

$$\begin{aligned}\int (15x^2 - 3\cos x)\,\mathrm{d}x &= \int \big(5(3x^2) + 3(-\operatorname{sen} x)\big)\,\mathrm{d}x = \\ &= 5\int 3x^2\,\mathrm{d}x + 3\int -\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = \\ &= 5x^3 + 3\cos x + C\end{aligned}$$

En el resto del tema se proporcionan algunos métodos y estrategias para el cálculo de primitivas. En primer lugar, se presentan los tres métodos básicos de cálculo de primitivas: integración inmediata, integración por partes y cambio de variable o sustitución. El objetivo en cada uno de ellos es conocer y saber aplicar el método en cada caso y así aprender a identificar qué método es más adecuado para calcular la primitiva de una función dada.

Al final del tema se estudian algunos tipos particulares de integrales que reciben el nombre en función de la expresión del integrando. En general, la tarea que hace más complejo el cálculo de primitivas es identificar el modelo correspondiente al integrando con el fin de aplicar las técnicas más apropiadas. En muchos casos, la dificultad estará en la necesidad de realizar transformaciones algebraicas que permitan identificar ese modelo.

5.1.2. Integrales inmediatas

Las fórmulas de derivación proporcionan un primer método para calcular la primitiva de las funciones elementales. Decimos que una integral es inmediata si la podemos reconocer utilizando directamente una fórmula de derivación.

A continuación proporcionamos unas tablas con las fórmulas de integración inmediata obtenidas a partir de la derivada de las funciones elementales y la regla de la cadena.

En primer lugar veamos las fórmulas relativas a las funciones polinómicas:

Fórmulas de derivación	Fórmulas de integración
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(k) = 0$	$\int 0\,\mathrm{d}x = C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$	$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f^n(x)) = nf^{n-1}(x)f'(x)$	$\int f^n(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

EJEMPLO 5.1.2 Para calcular la integral $\int \cos x \operatorname{sen}^3 x\,\mathrm{d}x$ de manera inmediata es necesario identificar la expresión del integrando con el modelo $f^n(x)f'(x)$ que aparece en la fórmula de integración:

$$\int f^n(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C, \qquad n \neq -1$$

En este caso, considerando que $f(x) = \operatorname{sen} x$ se obtiene el resultado de la integral

$$\int \cos x \operatorname{sen}^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x + C$$ ——

Ahora veamos las fórmulas de integración relativas a las funciones exponencial y logaritmo.

Fórmulas de derivación	Fórmulas de integración
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x$	$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) = a^x \ln a$	$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{f(x)}) = \mathrm{e}^{f(x)}f'(x)$	$\int \mathrm{e}^{f(x)}f'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{f(x)} + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert f(x)\rvert + C$

EJEMPLO 5.1.3 Para calcular la integral $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$ de manera inmediata, podemos identificar la expresión del integrando con el modelo $\frac{f'(x)}{f(x)}$ que aparece

en la fórmula de integración

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln f(x) + C,$$

y para ello, utilizamos que $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y consideramos $f(x) = \cos x$ para obtener el resultado de la integral

$$\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln\cos x + C.$$

Obsérvese que en la segunda igualdad hemos introducido la constante -1 para que el integrando se corresponda exactamente con el modelo de la fórmula.

——

Como hemos visto en las tablas anteriores, cualquier regla de derivación nos proporciona una regla de integración. Por tanto, será necesario considerar las fórmulas de derivación de todas las funciones elementales.

Ejemplo 5.1.4 A partir de la fórmula de derivación de la función argsenh $f(x)$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{argsenh} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, y de la regla de la cadena, obtenemos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{argsenh} f(x)) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}},$$

y a partir de ahí, podemos obtener la siguiente fórmula de integración:

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{argsenh} f(x) + C$$ ——

A continuación, presentamos las reglas de derivación de las funciones trigonométricas e hiperbólicas más usuales y que pueden ser de utilidad para el cálculo de primitivas.

Fórmulas de derivación
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{sen} f(x)) = f'(x)\cos f(x)$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos f(x)) = -f'(x)\operatorname{sen} f(x)$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{tg} f(x)) = f'(x)\sec^2 f(x)) = f'(x)(1+\operatorname{tg}^2 f(x))$

Fórmulas de derivación
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{arc\,sen} f(x)) = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{arc\,cos} f(x)) = \dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{arc\,tg} f(x)) = \dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{senh} f(x)) = f'(x)\cosh f(x)$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cosh f(x)) = f'(x)\operatorname{senh} f(x)$

EJEMPLO 5.1.5 Para calcular $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x^2 \,\mathrm{d}x$, usamos el modelo $-f'(x)\operatorname{sen} f(x)$ identificando $f(x) = x^2$:

$$\int x \operatorname{sen}(x^2)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int -2x \operatorname{sen} x^2 \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cos x\text{`}2 \qquad \text{——}$$

EJEMPLO 5.1.6 Para calcular la integral $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ de manera inmediata, podemos identificar la expresión del integrando con el modelo $\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$ que aparece en la fórmula de derivación de la función $\operatorname{arc\,tg}(f(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{arc\,tg}(f(x))) = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)},$$

Esta da lugar a la siguiente fórmula de integración:

$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arc\,tg} f(x) + C$$

Si consideramos que $f(x) = x^2$ obtenemos el resultado de la integral

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(x^2) + C \qquad \text{——}$$

Como hemos podido observar en los ejemplos anteriores, la determinación de una integral como inmediata dependerá de la habilidad que se tenga para identificar el integrando con alguna de las expresiones que aparecen en las fórmulas de derivación conocidas.

5.1.3. Integración por partes

El objetivo del método de integración por partes que introducimos en esta sección y de los métodos de sustitución de la sección siguiente es transformar la integral inicial hasta obtener una integral inmediata. En algunos casos será necesario aplicar reiteradamente estos métodos, e incluso utilizar ambos.

El teorema de *integración por partes* se escribe en términos de primitivas como sigue:

TEOREMA 5.1.5 *Dadas dos funciones, u y v, derivables y con derivadas continuas, se verifica:*

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\mathrm{d}x$$

Abusando de la notación, el resultado anterior se escribe de forma más simplificada como:

$$\int u\,\mathrm{d}v = u\,v - \int v\,\mathrm{d}u$$

Se recomienda usar este método cuando en la expresión del integrando se corresponda con el producto de dos funciones de distinto tipo. Por ejemplo, una expresión polinómica por una exponencial o por una trigonométrica.

Obsérvese que al aplicar este método seguimos teniendo que calcular una integral indefinida. Por lo tanto, identificaremos como u a una de las expresiones y como v' a la otra expresión de tal manera que la integral resultante de aplicar el método sea más sencilla de calcular que la de partida.

EJEMPLO 5.1.7 Para calcular la integral $\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ identificamos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} u = x &\longrightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &\longrightarrow v = \mathrm{e}^x \end{aligned}$$

y aplicamos el método de integración por partes:

$$\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

Al final, obtenemos una integral inmediata $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ que calculamos para obtener el resultado final:

$$\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C = (x-1)\mathrm{e}^x + C \qquad \text{——}$$

En algunos casos, como en el ejemplo siguiente, será necesario aplicar el método reiteradamente.

EJEMPLO 5.1.8 Para calcular la integral $\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ identificamos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} u = x^2 &\longrightarrow \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &\longrightarrow v = \mathrm{e}^x \end{aligned}$$

y aplicamos el método de integración por partes:

$$\int x^2 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - \int 2x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$$

La integral que hemos obtenido se resuelve también por partes, como hemos visto en el ejemplo anterior. Al final, agrupando las expresiones se obtiene:

$$\int x^2 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - 2(x-1)\mathrm{e}^x = (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x + C$$

———

En ocasiones, cuando se aplica reiteradamente este método volvemos a obtener la integral de partida. Este tipo de integrales se denominan cíclicas y la solución se obtiene despejando la integral de partida de la ecuación resultante.

Ejemplo 5.1.9 Para calcular la integral $\int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x$ identificamos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} u = \mathrm{e}^x &\longrightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x &\longrightarrow v = -\cos x \end{aligned}$$

y aplicamos el método de integración por partes:

$$\int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x \cos x - \int -\mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x$$

Para calcular la integral $\int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x$ que aparece en la expresión obtenida, identificamos las funciones como sigue:

$$\begin{aligned} u = \mathrm{e}^x &\longrightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cos x \,\mathrm{d}x &\longrightarrow v = \operatorname{sen} x, \end{aligned}$$

y volvemos a aplicar el método de integración por partes,

$$\int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x - \int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x,$$

para obtener la misma integral de partida. Si agrupamos las expresiones:

$$\int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x - \int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x,$$

podemos despejar la expresión $\int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x$ y obtener el resultado final:

$$\int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x = \frac{-\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x}{2} + C$$

En este tipo de integrales hay que tener especial cuidado en identificar las mismas funciones en las dos veces que se aplica el método pues en otro caso se obtiene una identidad de la cual no es posible despejar la integral. ———

Como vemos en el siguiente ejemplo, otra de las aplicaciones de este método es integrar funciones simples no inmediatas.

EJEMPLO 5.1.10 Para calcular la integral $\int \ln x \, \mathrm{d}x$ identificamos las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rcl} u = \ln x & \longrightarrow & \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x & \longrightarrow & v = x \end{array}$$

y aplicamos el método de integración por partes:

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int \mathrm{d}x = x \ln x - x + C \qquad \text{——}$$

5.1.4. Cambio de variable o sustitución

A partir de la regla de la cadena se deduce la fórmula general del cambio de variable que permite aplicar el método de sustitución.

TEOREMA 5.1.6 *Dadas dos funciones f, g con f y g' continuas, se verifica que:*

$$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = F(g(x))$$

donde F es una primitiva de la función f.

A partir de este teorema se deducen dos *métodos de sustitución*, uno directo y otro inverso.

5.1.4.1. Cambio de variable directo

El primer método de sustitución se puede esquematizar como sigue:

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x \overset{1}{=} \int f(t)\,\mathrm{d}t \overset{2}{=} F(t) \overset{3}{=} F(g(x)) + C$$

Es decir, en primer lugar (1) hacemos la sustitución:

$$\begin{array}{rcl} g(x) & \to & t \\ g'(x)\mathrm{d}x & \to & \mathrm{d}t \end{array}$$

A continuación, (2) hallamos la integral $\int f(t)\mathrm{d}t = F(t)$; y por último, (3) *deshaciendo* el cambio, $t \to g(x)$, se obtiene que la primitiva buscada es $F(g(x))$.

Se recomienda usar este método cuando en la expresión del integrando se identifica a una función $f(x)$ y a su derivada $f'(x)$. En este caso, sustituiremos la función $f(x)$ por la nueva variable, por ejemplo t, y su derivada $f'(x)\mathrm{d}x$ por $\mathrm{d}t$. Si la sustitución es acertada, habrá desaparecido la variable x y la integral resultante será más sencilla.

EJEMPLO 5.1.11 Para calcular $\int x \operatorname{sen} x^2 \, \mathrm{d}x$ hacemos la sustitución:

$$\begin{aligned} x^2 &\rightarrow t \\ 2x \, \mathrm{d}x &\rightarrow \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

que permite transformar la integral anterior en una integral inmediata que se resuelve aplicando la fórmula de integración de la función $\operatorname{sen}(x)$ de la siguiente manera:

$$\int x \operatorname{sen}(x^2) \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} \operatorname{sen}(t) \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{2} \cos(t)$$

Al final se deshace el cambio para obtener el resultado:

$$\int x \operatorname{sen}(x^2) \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \cos(x^2) + C$$

EJEMPLO 5.1.12 Para calcular $\int \cos x \ln \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$ hacemos la sustitución

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &\rightarrow t \\ \cos x \, \mathrm{d}x &\rightarrow \mathrm{d}t \end{aligned}$$

que permite transformar la integral anterior para obtener la integral

$$\int \cos x \ln \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = \int \ln t \, \mathrm{d}t$$

Esta integral fue resuelta en el ejemplo 5.1.10. Al aplicar el resultado y deshacer el cambio se obtiene la solución final:

$$\int \cos x \ln \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = \int \ln t \, \mathrm{d}t = t \ln t - t = \operatorname{sen} x \ln \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x + C$$

Al principio, es posible que apliquemos este método de sustitución a integrales que, con un poco de experiencia, pueden ser consideradas como inmediatas. En realidad, la identificación de la fórmula de integración para calcular una integral inmediata no dejan de ser un caso particular de este método de sustitución. Veamos a continuación, cómo calcular la misma integral del ejemplo 5.1.6 utilizando un cambio de variable directo.

EJEMPLO 5.1.13 Para calcular la integral $\int \frac{x}{1+x^4} \, \mathrm{d}x$, que habíamos resuelto en el ejemplo 5.1.6 como inmediata, podemos aplicar la sustitución

$$\begin{aligned} x^2 &\rightarrow t \\ 2x \, \mathrm{d}x &\rightarrow \mathrm{d}t \end{aligned}$$

que permite transformar la integral anterior en una integral inmediata que se resuelve aplicando la fórmula de integración de la función $\operatorname{arc\,tg}(x)$ de la siguiente manera:

$$\int \frac{x}{1+x^4} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{2}}{1+t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} t$$

Al final, se deshace el cambio para obtener el mismo resultado obtenido en el ejemplo 5.1.6:

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x^2 + C \qquad \text{——}$$

5.1.4.2. Cambio de variable inverso

El segundo método de sustitución se puede esquematizar como sigue:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{1}{=} \int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t \overset{2}{=} F(t) \overset{3}{=} F(g^{-1}(x)) + C$$

Es decir, en primer lugar (1) se sustituye la variable inicial por una expresión dependiente de una nueva variable:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow g(t) \\ \mathrm{d}x &\rightarrow g'(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

A continuación (2) hallamos la integral $\int f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t = F(t)$; y por último, (3) *deshaciendo* el cambio, $t \rightarrow g^{-1}(x)$, se obtiene que la primitiva buscada es $F(g^{-1}(x))$.

En general, no es nada fácil identificar cuándo y cómo aplicar este método de cambio de variable inverso. Sin embargo, en la siguiente sección veremos que forma parte de la estrategia a seguir en el cálculo de la primitiva de algunos tipos específicos de funciones.

Ejemplo 5.1.14 Para calcular la integral irracional $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ se recomienda, tal y como veremos en la sección siguiente, realizar el siguiente cambio de variable, cuyo objetivo es simplificar la raíz cuadrada:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \operatorname{sen} t \\ \mathrm{d}x &\rightarrow \cos t\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

De esta forma, la integral anterior se trasforma en una *integral trigonométrica*

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t,$$

que podemos resolver, por ejemplo, utilizando la fórmula del coseno del ángulo mitad:

$$\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} \qquad \text{——}$$

La mayoría de los métodos de integración están basados en uno de los dos métodos de sustitución. El problema se plantea en elegir el cambio de variable más adecuado en cada caso.

5.1.5. Aplicaciones

En función del método utilizado, las integrales se clasifican en "inmediatas", "por partes" y "por sustitución". A continuación presentamos otros tipos de integrales que reciben el nombre en función de la expresión del integrando. Además, veremos las estrategias utilizadas para calcular estas integrales que consisten en realizar alguna transformación algebraica y/o aplicar el método de cambio de variable inverso utilizando alguna sustitución específica para cada caso.

5.1.5.1. Integración de funciones racionales

Las funciones racionales son funciones que siempre pueden integrarse aunque algunas veces puede ser bastante laborioso. El método consiste en descomponer el integrando en fracciones simples (como vimos en el primer tema) y aplicar la linealidad de la integral. De esta manera sólo es necesario saber integrar cada uno de los tipos de fracciones simples que podemos obtener en la descomposición:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x \qquad \text{y} \qquad \int \frac{x+a}{(x^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x$$

La primera de las integrales es inmediata y se resuelve aplicando la fórmula de derivación de los logaritmos (si $n = 1$) o la fórmula de derivación de las potencias (si $n \neq 1$).

Ejemplo 5.1.15 Para calcular la integral $\displaystyle\int \frac{3}{2x-7}\,\mathrm{d}x$ aplicamos la fórmula de integración

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C,$$

aunque antes será necesario aplicar la linealidad de la integral:

$$\int \frac{3}{2x-7}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2}{2x-7}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln|2x-7| + C$$

Ejemplo 5.1.16 Para calcular la integral $\displaystyle\int \frac{2}{(x-3)^5}\,\mathrm{d}x$ aplicamos la fórmula de integración

$$\int f^n(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C, \qquad n \neq -1,$$

aunque antes será necesario aplicar la linealidad de la integral

$$\int \frac{2}{(x-3)^5}\,\mathrm{d}x = 2\int (x-3)^{-5}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{-4}(x-3)^{-4} = -\frac{1}{2(x-3)^4} + C$$

Veamos ahora el procedimiento para calcular el segundo tipo de integral racional simple

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{en donde } x^2+bx+c \text{ no tiene raíces reales.}$$

Si $n=1$ el procedimiento consiste en completar cuadrados en la expresión del denominador

$$x^2+bx+c=(x+A)^2+B=B\left(\left(\frac{1}{\sqrt{B}}(x+A)\right)^2+1\right)$$

y aplicar el cambio de variable directo

$$t=\frac{1}{\sqrt{B}}(x+A) \quad \text{o bien} \quad x=\sqrt{B}t-A$$

Al final obtenemos una integral que podemos descomponer (aplicando la propiedad de linealiadad) como suma de dos integrales inmediatas de alguno de estos dos tipos:

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\ln(x^2+1)+C \qquad \text{y} \qquad \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\operatorname{arc\,tg} x+C$$

Ejemplo 5.1.17 Para calcular la integral $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$ se completan cuadrados en la expresión del denominador

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\left(\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)$$

y se aplica el siguiente cambio de variable inverso

$$t=\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{o bien} \quad x=\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{2}$$

que permite transformar la integral de partida de la siguiente manera

$$\int \frac{x+3}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\int \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{2}\right)+3}{\frac{3}{4}(t^2+1)}\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{t\sqrt{3}+5}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

Aplicando la propiedad de linealidad, la escribimos como suma de dos primitivas inmediatas de tipo logarítmico y arcotangente:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{t\sqrt{3}+5}{t^2+1}\mathrm{d}t=\int \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t+\frac{5}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+\frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg} t$$

Al final, deshaciendo el cambio se obtiene el resultado final:

$$\int \frac{x+3}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}(x^2+x+1)\right) + \frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3} + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Obsérvese que la constante $\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$ se ha eliminado al introducir la constante de integración. ——

Si $n > 1$ podemos obtener una expresión de la integral en términos de la misma integral pero con un grado menos $(n-1)$. Si repetimos este procedimiento $n-1$ veces obtendremos una expresión de la integral en términos de una integral de grado $n = 1$ como las que acabamos de estudiar antes.

En cada paso, para obtener estas *fórmulas de reducción* utilizaremos el método de integración por partes aplicado a la misma integral que queremos calcular, pero con un grado menos, es decir, la que resulta de cambiar n por $n-1$.

Ejemplo 5.1.18 Para calcular la integral $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$ consideramos la integral $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ e identificamos las siguientes funciones:

$$u = \frac{1}{x^2+1} \quad\longrightarrow\quad \mathrm{d}u = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x \quad\longrightarrow\quad v = x$$

y aplicamos el método de integración por partes:

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Ahora aplicamos la siguiente descomposición (linealidad) a la integral obtenida en el segundo miembro:

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

lo que nos permite obtener la igualdad

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{x^2+1} + 2\left(\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x\right)$$

de donde podemos obtener la siguiente fórmula de reducción para la integral que queríamos calcular:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\right)$$

El resultado final es:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \operatorname{arc\,tg} x\right) + C \qquad \text{——}$$

En este ejemplo, sólo ha sido necesario aplicar el procedimiento una vez, pues la integral era de grado $n = 2$; en el siguiente ejemplo, vemos la necesidad de aplicar dos veces el procedimiento de reducción, ya que la integral es de grado $n = 3$.

Ejemplo 5.1.19 Para calcular la integral $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x$ consideramos la integral $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$ e identificamos las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rcl} u = \dfrac{1}{(x^2+1)^2} & \longrightarrow & \mathrm{d}u = \dfrac{-4x}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x & \longrightarrow & v = x \end{array}$$

y aplicamos el método de integración por partes:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{(x^2+1)^2} + 4\int \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x$$

Ahora aplicamos la siguiente descomposición (linealidad) a la integral obtenida en el segundo miembro:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

lo que nos permite obtener la igualdad

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{(x^2+1)^2} + 4\left(\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x\right)$$

de donde podemos obtener la siguiente fórmula de reducción para la integral que queríamos calcular:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{(x^2+1)^2} + 3\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x\right)$$

Ya hemos obtenido una fórmula de reducción para la integral de grado $n = 3$ en función de la misma integral de grado $n = 2$. Ahora aplicaríamos el mismo

procedimiento para reducir esta integral de grado $n = 2$ (ver ejemplo 5.1.18) y obtendríamos la siguiente fórmula de reducción:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\right)$$

Al final, si agrupamos todas las expresiones, obtenemos el resultado en función de una integral inmediata que podemos calcular:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x =& \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{1}{8}\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \\ =& \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{8} + C\end{aligned}$$

——

5.1.5.2. Integración de funciones trigonométricas

En esta sección vamos a ver las técnicas básicas para calcular integrales donde aparecen funciones trigonométricas. En primer lugar insistimos una vez más en la conveniencia de tener presentes las distintas fórmulas trigonométricas básicas, para transformar las expresiones de forma que sea fácil identificar el modelo más adecuado.

Las funciones que vamos a estudiar son *racionales en* sen y cos, es decir, se pueden escribir como $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ en donde $R(y, z)$ es una función racional (cociente de dos polinomios de dos variables). Por ejemplo, las siguientes expresiones son racionales en sen y cos:

$$\frac{3\operatorname{sen}^2 x + \cos x - 5}{\operatorname{sen} x + 2}, \qquad \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos^2 x - 1}, \qquad \operatorname{tg} 2x;$$

mientras que estas otras no lo son:

$$\frac{x^3 + \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}, \qquad \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\mathrm{e}^{\cos x}}, \qquad \frac{\operatorname{sen}\cos x}{\cos^2 x}$$

Dependiendo de la paridad de la función $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ se aplica una de las siguientes sustituciones:

1. Si $R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, se usará la sustitución $\operatorname{sen} x = t$.
2. Si $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, se usará la sustitución $\cos x = t$.
3. Si $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, se usará la sustitución $\operatorname{tg} x = t$ donde
$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}, \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

4. En cualquier otro caso, y como último recurso, se usará la sustitución $\operatorname{tg}(x/2) = t$ donde

$$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t, \quad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Estos cambios de variable reducen el problema a integrar una función racional.

EJEMPLO 5.1.20 Para calcular la integral $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x$ utilizamos el cambio de variable $\cos x = t$ y obtenemos una integral inmediata

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int \left(\sqrt{1-t^2}\right)^3 t^2 \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \\ = -\int (t^2 - t^4)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5$$

y deshaciendo el cambio llegamos a la solución:

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C \qquad \text{——}$$

EJEMPLO 5.1.21 Para calcular la integral $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\operatorname{sen} x}$ utilizamos el cambio de variable $\operatorname{tg}(x/2) = t$, ya que no es posible aplicar ninguno de los otros tres, y obtenemos una integral racional:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\operatorname{sen} x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{1}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{t+1}$$

Deshaciendo el cambio llegamos a la solución:

$$\int \frac{1}{1-\operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{t+1} = -\frac{2}{1+\operatorname{tg}(x/2)} + C \qquad \text{——}$$

5.1.5.3. Integración de funciones irracionales

El último tipo de funciones que vamos a estudiar son aquellas en las que aparece una raíz afectando a un polinomio. En general estas funciones no son fácilmente integrables, pero existen algunos casos que se pueden afrontar con éxito.

Las funciones que vamos a integrar son funciones racionales en x y expresiones radicales $\sqrt{x^2+bx+c}$, es decir, de la forma

$$\int R(x, \sqrt{x^2+bx+c})\,\mathrm{d}x,$$

en donde $R(x,y)$ es una función racional. Por ejemplo, las siguientes expresiones son de este tipo:

$$\frac{\sqrt{5x^2+3}}{x}, \qquad \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}, \qquad \frac{3x^2+5\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+7};$$

mientras que las expresiones

$$\frac{1+\ln x}{x^2+\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{y} \qquad \frac{3x^2+5\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2-1}+7}$$

no los son: la primera no es racional (aparece $\ln x$) y en la segunda, las subexpresiones con raíces no son iguales.

La forma más sencilla de afrontar este tipo de integrales es mediante un cambio de variable inverso utilizando funciones trigonométricas o hiperbólicas (véase el ejemplo 5.1.14) con el fin de hacer desaparecer la raíz cuadrada.

A continuación presentamos las sustituciones que deben usarse según el tipo de función irracional:

$$\begin{aligned} R(x,\sqrt{1-x^2}) &\implies x \to \operatorname{sen} t \\ R(x,\sqrt{x^2-1}) &\implies x \to \frac{1}{\operatorname{sen} t} \\ R(x,\sqrt{x^2+1}) &\implies x \to \operatorname{senh} t \end{aligned}$$

La expresión de la función a integrar determinará si debemos elegir la función seno o la función coseno en la sustitución.

Estas sustituciones convierten el integrando en una composición de funciones trigonométricas o hiperbólicas que hemos estudiado en la sección anterior.

Ejemplo 5.1.22 Para calcular la integral $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,\mathrm{d}x$ utilizamos el cambio de variable $x = \frac{1}{\operatorname{sen} t}$ y obtenemos un integral inmediata

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}}{\frac{1}{\operatorname{sen}^4 t}}\left(-\frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}\right)\mathrm{d}t = -\int \operatorname{sen} t \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\cos^3 t$$

Al final, deshacemos el cambio para obtener el resultado

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cos^3 t = \frac{1}{3}\cos^3 \operatorname{arc\,sen}\frac{1}{x}$$

que podemos escribir del siguiente modo, utilizando expresiones irracionales (aplicando transformaciones algebraicas):

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^3 + C \qquad \text{——}$$

Aunque en el esquema anterior se han utilizado funciones cuadráticas simples en el radicando de la expresión, no es difícil generalizar las sustituciones. Para ello sólo será necesario completar cuadrados siguiendo un procedimiento similar al utilizado en las funciones racionales:

$$x^2+bx+c = (x+A)^2+B$$

y aplicar el cambio de variable inverso

$$t = \frac{1}{\sqrt{B}}(x + A) \quad \text{o bien} \quad x = \sqrt{B}t - A$$

para obtener una función cuadrática simple en el radicando.

Ejemplo 5.1.23 Para calcular la integral $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}\,\mathrm{d}x$ se completan cuadrados en la expresión del radicando

$$x^2 - 2x + 5 = (x - 1)^2 + 4$$

y se aplica el siguiente cambio de variable inverso

$$t = \frac{1}{2}(x - 1) \quad \text{o bien} \quad x = 2t + 1$$

que permite transformar la integral de partida de la siguiente manera

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + 4}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{4t^2 + 4}}2\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}\,\mathrm{d}t$$

Ahora aplicamos el cambio de variable $t = \operatorname{senh} y$ a la integral obtenida

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\sqrt{\operatorname{senh}^2 y + 1}}\cosh y\,\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}y = y$$

y deshacemos los cambios para obtener el resultado:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{argsenh}\frac{x - 1}{2} + C \qquad \text{——}$$

Ejercicios básicos

1. Utilice el cambio de variable $t = \mathrm{e}^x$ y las fórmulas de derivación vistas en el tema para calcular la integral

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$$

2. Un método sencillo para calcular las integrales trigonométricas del tipo $\int \operatorname{sen}^n x\,\mathrm{d}x$ consiste en utilizar los números complejos. Para ello, expresamos el integrando en términos de senos y cosenos de múltiplos de x y obtenemos una integral inmediata.

   Utilice este método para calcular $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\,\mathrm{d}x$

3. En algunas integrales irracionales que se resuelven aplicando la sustitución $t = \operatorname{sen} x$, ocurre que al deshacer el cambio nos encontramos en la solución con expresiones del tipo $\cos(\operatorname{arc\,sen} x)$. En estos casos, resulta conveniente escribir la expresión en forma irracional. Para ello, sólo necesitamos aplicar propiedades de las funciones trigonométricas. Por ejemplo, para obtener otra expresión de $\cos(\operatorname{arc\,sen} x)$ aplicamos el teorema fundamental de la trigonometría ($\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$) y obtenemos

$$\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen} x)} = \sqrt{1-x^2}$$

   Aplique este procedimiento para obtener otra forma de escribir la expresión $\operatorname{sen}(2\operatorname{arc\,cos} x)$ sin utilizar funciones trigonométricas.

4. Utilice integración por partes para calcular $\displaystyle\int \ln^2 x\,\mathrm{d}x$.

5. Una misma integral se puede calcular aplicando distintos métodos de integración y todos ellos deben proporcionar la misma primitiva, salvo constante. Calcule la integral $\operatorname{sen}^2 x\,\mathrm{d}x$ aplicando los siguientes métodos:

   a) Aplicando los cambios sugeridos para las integrales trigonométricas.

   b) Integración por partes y fórmulas trigonométricas.

6. Las expresiones $\frac{1}{x}$ y $\frac{2}{2x}$ son iguales. Sin embargo, si calculamos la integral (inmediata) de cada una de ellas, obtenemos los siguientes resultados:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C \qquad \text{y} \qquad \int \frac{2}{2x}\,\mathrm{d}x = \ln(2x) + C$$

   ¿Son esos dos resultados realmente distintos ?

7. Para calcular la primitiva de una expresión con parámetros se procede como si los parámetros fuesen números. Si en una integral hay varias variables entonces todas ellas, salvo la indicada, se consideran parámetros. Calcule las siguientes integrales prestando especial atención al indicador de la variable (dx o dy).

$$(1)\quad \int \lambda x\,\mathrm{d}x \qquad (2)\quad \int x\,\mathrm{d}y \qquad (3)\quad \int 2xy^2\,\mathrm{d}x$$
$$(4)\quad \int 2xy^2\,\mathrm{d}y \qquad (5)\quad \int \frac{x}{y^2+x^4}\,\mathrm{d}x \qquad (6)\quad \int \frac{x}{y^2+x^4}\,\mathrm{d}y$$

8. Calcule las siguientes integrales:

$$(1)\quad \int (4x^3-3x^2+\frac{1}{2}x-\pi)\,\mathrm{d}x \qquad (2)\quad \int \sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$(3)\quad \int \cos x\,\mathrm{sen}^3\,x\,\mathrm{d}x \qquad (4)\quad \int \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x$$
$$(5)\quad \int x\,\mathrm{sen}(x^2)\,\mathrm{d}x \qquad (6)\quad \int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$
$$(7)\quad \int \frac{x^3}{1+x^4}\,\mathrm{d}x \qquad (8)\quad \int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,\mathrm{d}x$$
$$(9)\quad \int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \qquad (10)\quad \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{d}x$$
$$(11)\quad \int \ln x\,\mathrm{d}x \qquad (12)\quad \int x^5\,\mathrm{sen}\,x^3\,\mathrm{d}x$$
$$(13)\quad \int \cos x\ \log \mathrm{sen}\,x\,\mathrm{d}x \qquad (14)\quad \int \mathrm{e}^x\ \mathrm{tg}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$
$$(15)\quad \int \frac{3}{2x-7}\,\mathrm{d}x \qquad (16)\quad \int \frac{2}{(x-3)^5}\,\mathrm{d}x$$
$$(17)\quad \int \frac{x+3}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \qquad (18)\quad \int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x$$
$$(19)\quad \int \mathrm{sen}^3\,x\cos^2 x\,\mathrm{d}x \qquad (20)\quad \int \frac{1}{1-\mathrm{sen}\,x}\,\mathrm{d}x$$
$$(21)\quad \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad (22)\quad \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,\mathrm{d}x$$
$$(23)\quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,\mathrm{d}x \qquad (24)\quad \int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

LECCIÓN 5.2

Ecuaciones diferenciales

Una *ecuación diferencial* es una ecuación donde la incógnita es una función y en la expresión aparecen derivadas de la función incógnita.

Si la incógnita es una función de una variable, decimos que la ecuación diferencial es *ordinaria* y, si la incógnita es un campo escalar decimos que la ecuación diferencial es *en derivadas parciales*. En esta lección solamente estudiaremos las del primer tipo.

DEFINICIÓN 5.2.1 *Una* ecuación diferencial ordinaria *(en adelante, EDO) es una ecuación donde la incógnita es una función y en la expresión aparecen derivadas de la función incógnita.*

EJEMPLO 5.2.1 La siguiente igualdad es una ecuación diferencial:

$$x^2y' - xy = 4y',$$

Dado que sobre la variable y aparece el operador derivada, esta debe ser considerada la *incógnita* de la ecuación y sus soluciones serán de la forma $y = \varphi(x)$, es decir, x es la *variable independiente*. La función

$$y = \varphi(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

es una solución de la ecuación, según comprobamos a continuación.

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \sqrt{x^2-4} \\
\varphi'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \\
x^2\varphi'(x) - xy &= \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}} - x\sqrt{x^2-4} = \frac{4x}{\sqrt{x^2-4}} \\
x\varphi'(x) &= \frac{4x}{\sqrt{x^2-4}} \\
x^2\varphi'(x) - xy &= 4\varphi'(x)
\end{aligned}$$

—

EJEMPLO 5.2.2 El cálculo de primitivas, que estudiamos en la lección anterior, constituye un método de resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias del tipo

$$y' = f(x),$$

pues el objetivo era encontrar una función $y = F(x)$ que verificase $y' = f(x)$. Por ejemplo, para encontrar una solución de la ecuación diferencial $y' = \operatorname{tg} x$ calculamos la siguiente integral

$$y = \int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x = C - \ln\cos x, \quad C \in \mathbb{R}$$

—

Un criterio de clasificación de las ecuaciones diferenciales es el orden de derivación más alto que interviene en la ecuación, y que llamamos *orden* de la ecuación. Así,

$$\begin{aligned} &y''' + 4y = 2 && \text{es de orden 3,}\\ &y'' = -32 && \text{es de orden 2,}\\ &(y')^2 - 3y = \mathrm{e}^x && \text{es de orden 1,}\\ &y - \operatorname{sen} y' = 0 && \text{es de orden 1.} \end{aligned}$$

En esta lección, estudiamos las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que, en general, se representan como

$$F(x, y, y') = 0,$$

en donde F es un campo escalar de tres variables. En el resto de la lección, vamos a estudiar algunas propiedades teóricas de este tipo de ecuaciones, y vamos a introducir las técnicas para encontrar la solución de algunas clases específicas de ecuaciones.

5.2.1. Soluciones de una ecuación diferencial

Veamos los distintos tipos de soluciones de una ecuación diferencial (solución general, solución singular y solución particular) y los problemas que cabe plantearse en su estudio.

Consideremos la EDO de primer orden $y' + 2y = 0$. Es fácil comprobar que todas las funciones de la forma

$$\varphi_C(x) = C\mathrm{e}^{-2x}$$

son *soluciones* de dicha ecuación para cada $C \in \mathbb{R}$; dicha solución, expresada en función del parámetro C, se denomina *solución general* de la ecuación. Sin embargo, en algunas ocasiones, y debido a las manipulaciones algebraicas que se realizan para resolver las ecuaciones, podrán existir otras soluciones que no entren en el esquema de las soluciones generales; estas soluciones se denominan *soluciones singulares*. Por ejemplo, la ecuación $y = xy' - (y')^2$ admite como solución general:

$$\varphi_C(x) = Cx - C^2, \quad C \in \mathbb{R},$$

pero la función $\varphi(x) = x^2/4$ también es una solución y no entra en el esquema de solución general anterior (ver figura 5.1).

Los ejemplos anteriores muestran que, por lo general, una ecuación diferencial admite infinitas soluciones. Para evitar esta multiplicidad es necesario

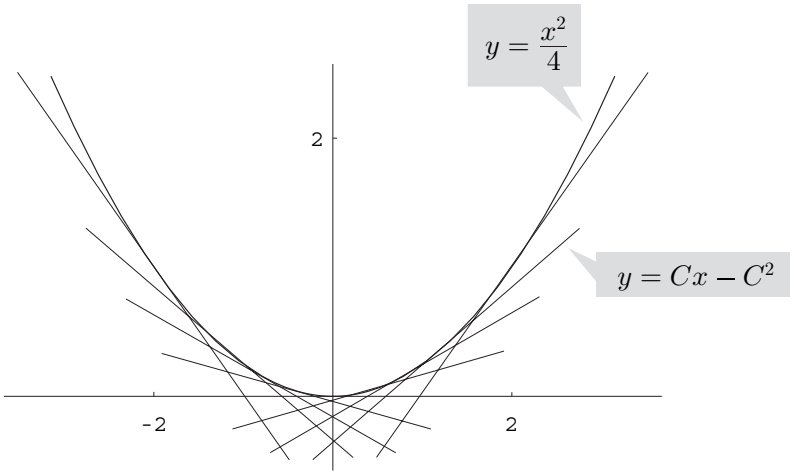


Figura 5.1: Soluciones de la ecuación $y = xy' - (y')^2$.

introducir *condiciones iniciales*, es decir, imponer que la función (solución) o sus derivadas tomen un determinado valor en un punto. Por ejemplo, un problema del tipo

$$y'' + 4y = 2 \qquad y(0) = 2 \quad , \quad y'(0) = 1$$

se denomina *problema de Cauchy* o *de condiciones iniciales* y la solución del problema se denomina *solución particular*.

Aunque siempre es posible plantearse la existencia de soluciones de una ecuación diferencial, sólo cabe la posibilidad de plantearse la unicidad de las mismas en los problemas de condiciones iniciales. Por ejemplo, la solución general de la EDO $y' + 2y = 0$ es $\varphi_C(x) = C\mathrm{e}^{-2x}$. Si le imponemos la condición inicial $y(0) = 2$, entonces $\varphi_2(x) = 2\mathrm{e}^{-2x}$ es la *única* solución del problema.

Por lo tanto, en el estudio de ecuaciones diferenciales podemos distinguir dos problemas fundamentales:

- Dada una ecuación diferencial con condiciones iniciales, ¿podemos afirmar que dicho problema tiene solución? Si dicho problema tiene solución ¿es única?
- Dada una ecuación diferencial para la cual podemos afirmar que tiene solución ¿cómo hallamos dicha solución?

El primer punto puede ser entendido como la parte teórica del tema y en ella se pueden formular otro tipo de preguntas más especificas: ¿cuál es el mayor dominio que se puede considerar para la solución? ¿existe alguna relación de dependencia entre las soluciones? ¿la dependencia de la solución general respecto de los parámetros es continua, es diferenciable?

El problema de encontrar las soluciones es, en general, bastante complicado; como ocurre con el cálculo integral, sólo para algunos tipos de ecuaciones es posible obtener sus soluciones mediante métodos sencillos. Cuando no es posible determinar las soluciones analíticas se pueden aplicar técnicas de aproximación o utilizando los desarrollos en serie de potencias o en series de Fourier de las soluciones.

5.2.2. Existencia y unicidad de soluciones

Aunque la forma general de una EDO de primer orden responde al esquema $F(x, y, y') = 0$, los resultados teóricos que presentamos en esta sección se aplican al caso particular en el que, mediante manipulaciones algebraicas, hemos podido "despejar" la derivada de la incógnita y expresarla en función de x e y; en este caso decimos que la ecuación está *resuelta respecto de la derivada* y un problema de Cauchy asociado tendría la siguiente forma:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (x_0, y_0) \in \mathrm{Dom}(f) \tag{p}$$

- Una función $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ es solución del problema (p) si
  1. φ es continua y derivable.
  2. $x_0 \in I$, $\varphi(x_0) = y_0$.
  3. $(x, \varphi(x)) \in \mathrm{Dom}(f)$ para todo $x \in I$.
  4. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ para todo $x \in I$.
- Decimos que la ecuación $y' = f(x, y)$ tiene la *propiedad de unicidad en* I si para cada $(x_0, y_0) \in \mathrm{Dom}(f)$ se verifica que:

  > Si $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ y $\psi\colon I \to \mathbb{R}$ son dos soluciones del problema (p) entonces $\varphi(x) = \psi(x)$ para todo $x \in I$.

El siguiente resultado proporciona condiciones necesarias para garantizar la existencia y la unicidad de soluciones que están relacionadas respectivamente con la continuidad de f y con su diferenciabilidad.

TEOREMA 5.2.2 *Consideremos el problema:*

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

1. *Si f es continua en un conjunto de la forma $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$, entonces el problema tiene solución definida en algún intervalo $I \subset [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$.*

2. *Si f es diferenciable y su parcial respecto de y es continua en un entorno de (x_0, y_0), entonces el problema tiene solución única en algún entorno de x_0.*

En los siguientes ejemplos se pone de manifiesto la necesidad de las condiciones del teorema anterior.

Ejemplo 5.2.3 Consideremos la ecuación

$$y' = y^2$$

La función nula es solución de esta ecuación (solución particular). Por otra parte, las funciones

$$\varphi_c(x) = \frac{-1}{x+c} \qquad x \in (-\infty, -c) \cup (-c, \infty)$$

también son soluciones (solución general). Es fácil comprobar que cualquier problema de condiciones iniciales tiene solución entre alguna de las anteriores; finalmente, dado que la función $f(x, y) = y^2$ es diferenciable y sus parciales son continuas, la ecuación anterior tiene la propiedad de unicidad y por lo tanto podemos concluir que las soluciones anteriores son las únicas soluciones de la ecuación. ——

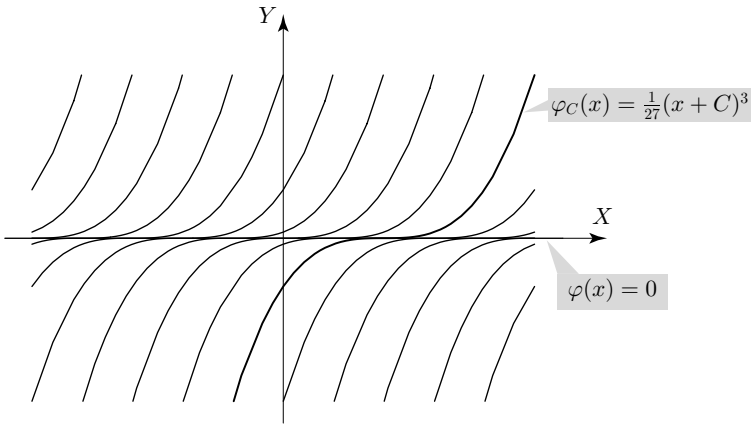


Figura 5.2: Soluciones de la ecuación $y' = y^{2/3}$

Ejemplo 5.2.4 Consideremos la ecuación

$$y' = y^{2/3}$$

La función nula es solución de esta ecuación. Por otra parte, las funciones

$$\varphi_c(x) = \frac{1}{27}(x+c)^3 \qquad x \in \mathbb{R}$$

son también soluciones (ver figura 5.2). Por tanto, esta ecuación no tiene la propiedad de unicidad en $\mathbb{R}^2$ pero sí tiene la propiedad de unicidad en los conjuntos $\mathbb{R} \times (-\infty, 0)$ y $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ ya que la función $f(x, y) = y^{2/3}$ es diferenciable en estos conjuntos y las parciales son continuas. ——

5.2.3. Resolución de EDO

Aunque, en general, una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es una expresión implícita del tipo $F(x, y, y') = 0$, en esta lección, vamos a abordar el estudio de técnicas para resolver las ecuaciones diferenciales *ordinarias de primer orden* de la forma

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0,$$

en donde, P y Q son campos escalares continuos. Obsérvese que en estos casos es inmediato despejar y' para resolverla respecto de la derivada y poder aplicar los resultados de la sección anterior.

Los métodos que veremos en esta sección se presentan como algoritmos de manipulación formal de las expresiones; algunos pasos de estos métodos pueden requerir condiciones adicionales sobre los dominios o sobre las funciones: en los problemas concretos, *debemos asegurarnos de que tales condiciones se verifican, o bien asegurarnos de que tales manipulaciones pueden realizarse.*

Así mismo, algunas manipulaciones pueden alterar parcialmente los resultados finales: añadir soluciones, perder soluciones, restringir o ampliar el dominio,. . . : *debemos tener esto en cuenta en los problemas concretos, y hacer un estudio posterior en el que se aborden estas cuestiones.*

Además, en muchos casos, el método de resolución no conduce a una *expresión explícita* de las soluciones si no a una definición *implícita.* De hecho, el objetivo de todos los métodos que estudiamos en este tema es eliminar los operadores de derivación en las ecuaciones, y convertir las ecuaciones diferenciales en ecuaciones no-diferenciales, cuya resolución es, en la mayoría de los casos, mucho más compleja.

Las ecuaciones diferenciales fundamentales son

- Ecuaciones de variables separables.
- Ecuaciones exactas.
- Ecuaciones lineales. (Estas ecuaciones pueden ser estudiadas a partir de las ecuaciones exactas pero dada su importancia y el hecho de tener

métodos propios para su resolución, hace que las destaquemos como fundamentales)

A partir de estos tipos concretos se pueden estudiar otros tipos de ecuaciones más generales; para ello vamos a usar dos técnicas básicas:

- Factores integrantes.
- Cambio de variable.

Estas técnicas transforman la ecuación estudiada en otra fundamental. En concreto, un cambio de variable puede conducir a una ecuación de variables separables (p.e. las ecuaciones homogéneas), a ecuaciones lineales (p.e. ecuaciones de Bernouilli) o a ecuaciones exactas; por otra parte, los factores integrantes transforman una ecuación en otra exacta.

5.2.4. Ecuaciones de variables separables

Una ecuación de *variables separadas* es una ecuación de la forma

$$P(x) + Q(y)y' = 0$$

Si, mediante operaciones algebraicas elementales, es posible transformar una ecuación en otra con la forma anterior, decimos que es una ecuación de *variables separables*.

Estas ecuaciones se resuelven de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} P(x) + Q(\varphi(x))\varphi'(x) &= 0 && \text{(integración)} \\ \int (P(x) + Q(\varphi(x))\varphi'(x))\,\mathrm{d}x &= C && \text{(linealidad)} \\ \int P(x)\,\mathrm{d}x + \int Q(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x &= C && \text{(sustitución)} \\ \int P(x)\,\mathrm{d}x + \int Q(y)\,\mathrm{d}y &= C && \text{(primitiva)} \end{aligned}$$

En el tercer paso hemos aplicado el método de sustitución utilizado el cambio de variable: $y = \varphi(x)$, $\mathrm{d}y = \varphi'(x)\mathrm{d}x$. Por lo tanto, si encontramos dos primitivas p y q de P y Q respectivamente, las soluciones de la ecuación inicial verificaran la expresión implícita:

$$p(x) + q(y) = C$$

Si es posible, resolveremos esta ecuación para obtener una expresión explícita $y = f(x)$ de la solución de la EDO.

EJEMPLO 5.2.5 $(x^2+4)y' = xy$ es una ecuación de variables separables:

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{x^2+4} = \frac{y'}{y}\\
&\int \frac{x}{x^2+4}\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = 0\\
&\frac{1}{2}\log(x^2+4) - \log|y| = C_1\\
&|y| = \mathrm{e}^{-C_1}\sqrt{x^2+4}\\
&y = \pm\mathrm{e}^{-C_1}\sqrt{x^2+4}\\
&y = C_2\sqrt{x^2+4} \qquad , \quad C_2 \in \mathbb{R} - \{0\}
\end{aligned}$$

Al separar las variables en el primer paso de la resolución hemos efectuado una división por y, lo que excluye del proceso posterior las soluciones que se anulan en algún punto. Sin embargo, la función nula $y = 0$ es solución de la ecuación inicial y, por la propiedad de unicidad, la única que pasa por los puntos del eje de abcisas. Por tanto, las soluciones de la ecuación son:

$$\varphi_C(x) = C\sqrt{x^2+4}, \qquad C \in \mathbb{R}$$ ——

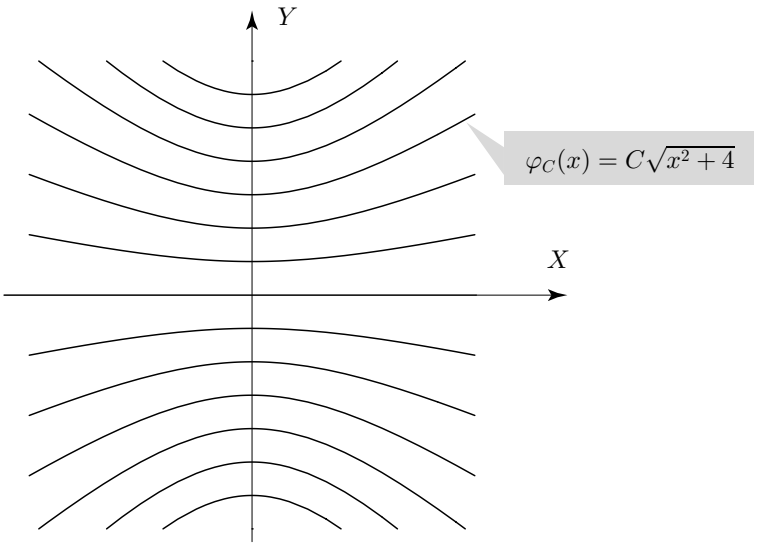


Figura 5.3: Soluciones de $(x^2+4)y' = xy$

5.2.5. Ecuaciones exactas

DEFINICIÓN 5.2.3 *La ecuación $P(x,y)+y'Q(x,y) = 0$ se dice exacta si el campo vectorial $\boldsymbol{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ es una diferencial exacta; es decir, si*

existe una campo escalar U (potencial) tal que $\nabla U(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$:

$$\mathrm{D}_1 U(x,y) = P(x,y) \qquad \mathrm{D}_2 U(x,y) = Q(x,y)$$

Por ejemplo, la ecuación $(xy^2 + x) + (yx^2)y' = 0$ es exacta ya que existe una función $U(x,y) = \frac{1}{2}(y^2x^2 + x^2)$ que verifica

$$\nabla U(x,y) = (xy^2 + x, yx^2) = (P(x,y), Q(x,y))$$

PROPOSICIÓN 5.2.4 *Si $P(x,y) + y'Q(x,y) = 0$ es una ecuación exacta, U es la función potencial de (P,Q) y f es una función real de variable real tal que $U(x, f(x)) = C$ para algún $C \in \mathrm{Dom}(f)$, entonces f es solución de la ecuación $P(x,y) + y'Q(x,y) = 0$.*

La demostración de esta proposición es una mera comprobación (aunque en el segundo paso aplicamos una versión de la regla de la cadena que estudiaremos en el tema siguiente).

$$\begin{aligned} U(x, f(x)) &= C \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(U(x, f(x))) &= 0 \\ \mathrm{D}_1 U(x, f(x)) + \mathrm{D}_2 U(x, f(x)) f'(x) &= 0 \\ P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) f'(x) &= 0 \\ P(x,y) + Q(x,y) y' &= 0 \end{aligned}$$

El siguiente resultado, conocido como *lema de Poincaré*, proporciona un método sencillo para determinar si una ecuación es exacta. Para ello, damos previamente una definición que utilizamos en el teorema.

DEFINICIÓN 5.2.5 *Un conjunto $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^2$ tiene* forma de estrella *si existe un punto $(a,b) \in \mathrm{D}$ de tal forma que los segmentos que unen este punto con cualquier otro del conjunto, está contenido en el conjunto.*

TEOREMA 5.2.6 (LEMA DE POINCARÉ) *Consideremos dos campos escalares, P y Q, en $\mathbb{R}^2$ y cuyo dominio es un conjunto en forma de estrella. $P(x,y) + y'Q(x,y) = 0$ es una ecuación exacta si y solo si $\mathrm{D}_2 P(x,y) = \mathrm{D}_1 Q(x,y)$.*

EJEMPLO 5.2.6 La ecuación

$$(xy^2 + x) + (yx^2)y' = 0$$

es exacta ya que:

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy^2 + x) = 2xy = \frac{\partial}{\partial x}(yx^2)$$

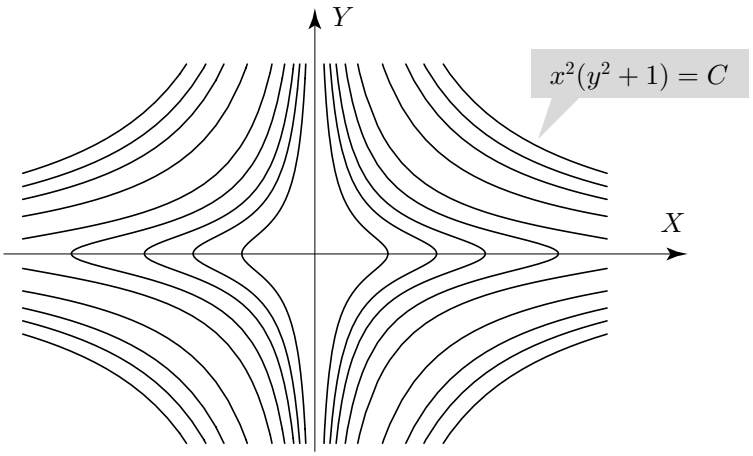


Figura 5.4: Soluciones de $(xy^2+x)+(yx^2)y'=0$

Ahora, hallamos un función potencial de (xy^2+x, yx^2) en $\mathbb{R}^2$:

$$U(x,y)=\int yx^2\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}y^2x^2+\varphi(x)$$

$$xy^2+x=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}y^2x^2+\varphi(x))=xy^2+\varphi'(x)$$

$$\varphi'(x)=x \qquad\qquad \varphi(x)=\frac{1}{2}x^2$$

$$U(x,y)=\frac{1}{2}(y^2x^2+x^2)$$

Las soluciones de la ecuación planteada (ver figura 5.4) son aquellas definidas implícitamente por

$$y^2x^2+x^2=C \qquad\qquad C\in[0,+\infty)$$

$C=0$ no define ninguna función y para $C>0$ las funciones solución son:

$$f_C(x)=\sqrt{\frac{C}{x^2}-1} \qquad\qquad g_C(x)=-\sqrt{\frac{C}{x^2}-1}$$

Podemos observar que ninguna de las soluciones anteriores corta el eje de ordenadas. Cualquier solución que pase por este eje debería ser una extensión de alguna solución f_C o g_C, lo cual es imposible, ya que estas funciones no pueden ser extendidas con continuidad al punto $x=0$. ——

5.2.6. Ecuaciones lineales

Las ecuaciones de la forma

$$y'+p(x)y+q(x)=0$$

se denominan *ecuaciones lineales de primer orden*. Si las funciones p y q son continuas, la ecuación tiene solución definida en la intersección de los dominios de las dos funciones y además, cada problema de Cauchy asociado a una ecuación lineal tiene solución única.

Aunque veremos otra forma de resolver este tipo de ecuaciones (factores integrantes), en esta sección vamos resolverlas por el método más utilizado, que se conoce como *variación de las constantes*. Para ello, vamos a empezar resolviendo un tipo particular, las *ecuaciones lineales homogéneas*, que responden a la forma

$$p(x)y + y' = 0,$$

es decir, q es la función nula. Estas ecuaciones se resuelven mediante separación de variables:

$$\begin{aligned} p(x)y + y' &= 0 \\ \frac{y'}{y} &= -p(x) \\ y &= C\exp\left(\int -p(x)\,\mathrm{d}x\right) = C\lambda(x), \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

El siguiente resultado nos da el fundamento teórico para el método de resolución de cualquier ecuación lineal que no sea homogénea a partir de la solución una homogénea.

Teorema 5.2.7 (Conjetura de Lagrange) *Consideremos la ecuación lineal*

$$y' + p(x)y + q(x) = 0 \tag{5.1}$$

y sea y_h una solución de la ecuación $y' + p(x)y = 0$, que se denomina ecuación lineal homogenea asociada *a* (5.1)*. Entonces, las soluciones de* (5.1) *son de la forma $y = c(x)y_h$, en donde $c(x)$ es una función derivable.*

El procedimiento para resolución de una ecuación lineal se resume entonces como sigue.

1. Resolvemos la ecuación lineal homogénea asociada $y' + p(x)y = 0$
2. Sustituimos la constante C que aparece en la solución general anterior, por una función continua $c(x)$.
3. Imponiendo la expresión anterior como solución, determinamos las funciones c y por lo tanto la solución general de la ecuación lineal.

Ejemplo 5.2.7 Para identificar la ecuación $(y-1)\operatorname{sen} x - y' = 0$ como una ecuación lineal, la escribimos

$$y' - y\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x = 0$$

Resolvemos la ecuación lineal homogénea asociada utilizando separación de variables:

$$\begin{aligned} y' - y\operatorname{sen} x &= 0 \\ \frac{y'}{y} &= \operatorname{sen} x \\ y_h &= C\mathrm{e}^{-\cos x} \end{aligned}$$

Por la conjetura de Lagrange, sabemos que existe una solución de la ecuación propuesta que tiene la forma $y_p = c(x)\mathrm{e}^{-\cos x}$, en donde $c(x)$ es una función derivable. Imponiedo esta función como solución podemos determinar fácilmente la función c:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(c(x)\mathrm{e}^{-\cos x}\right) - \left(c(x)\mathrm{e}^{-\cos x}\right)\operatorname{sen} x &= -\operatorname{sen} x \\ c'(x)\mathrm{e}^{-\cos x} + c(x)\operatorname{sen} x\mathrm{e}^{-\cos x} - c(x)\operatorname{sen} x\mathrm{e}^{-\cos x} &= -\operatorname{sen} x \\ c'(x)\mathrm{e}^{-\cos x} &= -\operatorname{sen} x \\ c'(x) &= -\operatorname{sen} x\mathrm{e}^{\cos x} \\ c(x) &= \mathrm{e}^{\cos x} + C \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación de partida es

$$y = (\mathrm{e}^{\cos x} + C)\mathrm{e}^{-\cos x} = 1 + C\mathrm{e}^{-\cos x}. \qquad \text{——}$$

Observamos en el ejemplo anterior que la solución general ha quedado expresada como suma de dos funciones. La primera es la función constantemente $\varphi_p(x) = 1$ y que es una solución particular de la ecuación (se obtiene haciendo $C = 0$); la segunda es la solución general de la ecuación homogénea asociada, $y_h = C\mathrm{e}^{-\cos x}$. Este esquema lo encontramos en todas las ecuaciones lineales, según recoge el siguiente resultado.

Teorema 5.2.8 (Principio de superposición) *La solución general de una ecuación lineal de primer orden se puede escribir como*

$$y = y_p + Cy_h,\ C \in \mathbb{R}$$

en donde y_p es una *solución de la ecuación e y_h es* una *solución de la ecuación homogénea asociada.*

5.2.7. Factores integrantes

Hemos estudiado en las secciones anteriores los tipos fundamentales de ecuaciones diferenciales. Como dijimos en la introducción, usando diversas técnicas podemos lograr, en algunos caso, transformar una ecuación dada en otra fundamental. En esta sección estudiamos los *factores integrantes*, que transforman una ecuación en exacta.

DEFINICIÓN 5.2.9 *El campo escalar $\mu(x,y)$ es un factor integrante de la ecuación $P(x,y)+y'Q(x,y)=0$ si la ecuación*

$$\mu(x,y)P(x,y)+y'\mu(x,y)Q(x,y)=0$$

es exacta.

Trivialmente, si f es solución de $P(x,y)+y'Q(x,y)=0$, también es solución de $\mu(x,y)P(x,y)+y'\mu(x,y)Q(x,y)=0$; es decir, resolviendo la ecuación exacta, encontramos las soluciones de la ecuación inicial. Sin embargo, *la ecuación $\mu(x,y)P(x,y)+y'\mu(x,y)Q(x,y)=0$ puede tener más soluciones que $P(x,y)+y'Q(x,y)=0$ y por tanto, deberemos verificar las soluciones obtenidas al terminar el cálculo y descartar las que no sean soluciones de la ecuación inicial*; en particular, puede haber funciones que verifiquen $\mu(x,y)=0$ y que no sean soluciones de la ecuación inicial.

Por ejemplo, la ecuación $(y^2+1)+(yx)y'=0$ no es exacta, pero $\mu(x,y)=x$ es un factor integrante de la misma, pues la ecuación $(xy^2+x)+(yx^2)y'=0$ es una ecuación exacta (ver ejemplo 5.2.6). En este caso, la ecuación exacta no añade soluciones a la ecuación propuesta.

En general, no es fácil predecir qué ecuaciones admiten factores integrantes. Sin embargo, sí es fácil caracterizar las ecuaciones que admiten un factor integrante con una condición adicional.

Por ejemplo, pensemos que nuestro factor integrante es una función que sólo depende de x. El objetivo es deducir en que condiciones la ecuación $P(x,y)+y'Q(x,y)=0$ admite un factor integrante $\lambda(x)$, es decir, en que condiciones existe una función $\lambda(x)$ tal que

$$\lambda(x)P(x,y)+y'\lambda(x)Q(x,y)=0$$

es una ecuación exacta. Si esta ecuación fuera exacta, entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}(\lambda(x)P(x,y)) &= \frac{\partial}{\partial x}(\lambda(x)Q(x,y))\\
\lambda(x)\mathrm{D}_2P(x,y) &= \lambda'(x)Q(x,y)+\lambda(x)\mathrm{D}_1Q(x,y)\\
\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} &= \frac{\mathrm{D}_2P(x,y)-\mathrm{D}_1Q(x,y)}{Q(x,y)} \overset{(*)}{=} h(x)\\
\log\lambda(x) &= \int h(x)\,\mathrm{d}x\\
\lambda(x) &= \exp\left(\int h(x)\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

Obsérvese que para que $(*)$ sea posible, la expresión

$$\frac{\mathrm{D}_2P(x,y)-\mathrm{D}_1Q(x,y)}{Q(x,y)}$$

tiene que ser una función $h(x)$ que sólo dependa de x, y esta es la condición que se debe cumplir para garantizar la existencia de un factor integrante que sólo dependa de x. Además, este método nos proporciona un procedimiento para calcular ese factor integrante. En este caso, $\lambda(x) = \exp\left(\int h(x)\mathrm{d}x\right)$.

El siguiente resultado nos proporciona una tabla de condiciones para la existencia de factores integrantes. Y, para cada una de ellas, nos indica la forma de obtener el factor integrante.

PROPOSICIÓN 5.2.10 *Consideremos la ecuación $P(x,y)+y'Q(x,y)=0$; para ella se verifican las siguientes condiciones de existencia de factores integrantes:*

1. *Si* $\dfrac{\mathrm{D}_1Q(x,y)-\mathrm{D}_2P(x,y)}{-Q(x,y)} = h(x)$ *y H es una primitiva de h, entonces* $\lambda(x)=\exp H(x)$ *es un factor integrante de la ecuación.*

2. *Si* $\dfrac{\mathrm{D}_1Q(x,y)-\mathrm{D}_2P(x,y)}{P(x,y)} = h(y)$ *y H es una primitiva de h, entonces* $\lambda(y)=\exp H(y)$ *es un factor integrante de la ecuación.*

3. *Si* $\dfrac{\mathrm{D}_1Q(x,y)-\mathrm{D}_2P(x,y)}{P(x,y)-Q(x,y)} = h(x+y)$ *y H es una primitiva de h, entonces* $\mu(x,y)=\exp H(x+y)$ *es un factor integrante de la ecuación.*

4. *Si* $\dfrac{\mathrm{D}_1Q(x,y)-\mathrm{D}_2P(x,y)}{-P(x,y)-Q(x,y)} = h(x-y)$ *y H es una primitiva de h, entonces* $\mu(x,y)=\exp H(x-y)$ *es un factor integrante de la ecuación.*

5. *En general, si* $\dfrac{\mathrm{D}_1Q(x,y)-\mathrm{D}_2P(x,y)}{mP(x,y)-nQ(x,y)} = h(nx+my)$ *y H es una primitiva de h, entonces* $\mu(x,y)=\exp H(nx+my)$ *es un factor integrante de la ecuación.*

6. *Si* $\dfrac{\mathrm{D}_1Q(x,y)-\mathrm{D}_2P(x,y)}{xP(x,y)-yQ(x,y)} = h(xy)$ *y H es una primitiva de h, entonces* $\mu(x,y)=\exp H(xy)$ *es un factor integrante de la ecuación.*

EJEMPLO 5.2.8 Resolvamos la ecuación $(y^2-x)+2yy'=0$. Esta ecuación admite un factor integrante que depende solo de x:

$$\frac{\mathrm{D}_2P(x,y)-\mathrm{D}_1Q(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{2y-0}{2y} = 1 = h(x)$$

El factor integrante es $\lambda(x)=\mathrm{e}^x$. Resolvemos la ecuación exacta $\mathrm{e}^x(y^2-x)+2y\mathrm{e}^xy'=0$ cuyas soluciones están definidas en forma implícita por

$$y^2\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = C$$

Las soluciones son: $f_C(x)=\sqrt{C\mathrm{e}^{-x}-1+x}$ y $g_C(x)=-\sqrt{C\mathrm{e}^{-x}-1+x}$.

———

5.2.8. Cambios de variables

La segunda técnica para la transformación de ecuaciones diferenciales en ecuaciones fundamentales es *el cambio de variable*. El método general consiste en introducir una nueva variable dependiente y, en algunos casos, una nueva variable independiente que estarán relacionadas con las variables iniciales.

El caso más sencillo consiste en sustituir únicamente la variable dependiente y por otra nueva variable z que se definirá a partir de una relación del tipo $z = f(x, y)$ o bien $y = g(x, z)$; al hacer el cambio en las variables dependientes, debemos entender estas igualdades como $z(x) = f(x, y(x))$ y $y(x) = g(x, z(x))$ respectivamente.

Ejemplo 5.2.9 Vamos a utilizar el cambio de variable $y = xz$ para resolver la ecuación diferencial $(x^2 - y^2) + 3xyy' = 0$. En primer lugar, derivamos la igualdad del cambio de variable para deducir la relación entre las derivadas de las dos variables:

$$y' = z + xz'$$

Ahora ya podemos sustituir completamente la variable y para obtener una nueva ecuación con incógnita z:

$$\begin{aligned} (x^2 - y^2) + 3xyy' &= 0 \\ (x^2 - (xz)^2) + 3x(xz)(z + xz') &= 0 \\ 1 + 2z^2 + 3xzz' &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación resultante es de variables separables que resolvemos como sigue.

$$\begin{aligned} 1 + 2z^2 &= -3xzz' \\ \frac{1}{x} &= \frac{-3z}{1 + 2z^2} z' \\ \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{3z}{1 + 2z^2} \mathrm{d}z &= C_1 \\ \log|x| + \frac{3}{4}\log(1 + 2z^2) &= C_1 \\ 4\log|x| + 3\log(1 + 2z^2) &= C_2 \\ \log x^4(1 + 2z^2)^3 &= C_2 \\ x^4(1 + 2z^2)^3 &= C_3 > 0 \end{aligned}$$

Finalmente, deshaciendo el cambio, se obtienen las soluciones de la ecuación inicial:

$$\begin{aligned} x^4\left(1 + 2\frac{y^2}{x^2}\right)^3 &= C_3, x \neq 0\,, C_3 > 0 \\ (x^2 + 2y^2)^3 &= C_3 x^2, x \neq 0,\ C_3 > 0 \end{aligned}$$

En algunos casos, el cambio de variable aconsejado para transformar una ecuación diferencial consiste en cambiar tanto la variable independiente como la variable dependiente por dos nuevas variables.

EJEMPLO 5.2.10 Para calcular la ecuación diferencial $y' = \dfrac{2x+y}{3x+y-1}$ utilizamos el doble cambio de variable

$$\begin{aligned} t &= x-1 \\ z &= y+2 \end{aligned}$$

En la segunda igualdad se entiende que z es función de t, es decir, $z(t) = y(t+1)+2$. Por lo tanto, $z'(t) = y'(t+1)$, es decir, $z' = y'$, y la ecuación se transforma en:

$$\begin{aligned} z' &= \frac{2(t+1)+(z-2)}{3(t+1)+(z-2)-1} \\ z' &= \frac{2t+z}{3t+z} \end{aligned}$$

Esta ecuación se resuelve aplicando un nuevo cambio de variable: $z = tu$, $z' = u + tu'$.

$$\begin{aligned} u+tu' &= \frac{2t+tu}{3t+tu} \\ u+tu' &= \frac{2+u}{3+u} \\ tu' &= \frac{2+u}{3+u} - u = -\frac{u^2+u}{u+3} \\ 0 &= \frac{u+3}{u^2+u}u' + \frac{1}{t} \\ C_1 &= \ln\left|\frac{u^3}{(u+1)^2}\right| + \ln|t| \\ C_2 &= \frac{|tu^3|}{(u+1)^2}, \qquad C_2 > 0 \end{aligned}$$

Al deshacer el cambio de variable $z = tu$ obtenemos

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{|z^3|}{(z+t)^2}, \qquad C_2 > 0 \\ C_3 &= \frac{z^3}{(z+t)^2}, \qquad C_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Y al deshacer el doble cambio $t = x-1$, $z = y+2$ obtenemos

$$C = \frac{(y+2)^3}{(y-x+3)^2}, \qquad C \in \mathbb{R} \qquad \text{——}$$

Tal y como ocurría en el cálculo de primitivas, la dificultad de aplicar el método de sustitución es determinar el cambio de variable más adecuado que permita transformar nuestra ecuación en una ecuación fundamental. Como veremos en la relación de ejercicios, existen modelos de ecuaciones para los cuales se recomienda un cambio de variable concreto. La dificultad entonces estará en reconocer el modelo.

5.2.9. Otros tipos

En esta sección, vamos a ver algunos tipos de ecuaciones más específicos cuya resolución hace uso de los métodos estudiados en las secciones anteriores.

Ecuaciones homogéneas. Un campo escalar $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice *homogéneo de grado* p si $f(tx, ty) = t^p f(x, y)$. La ecuación $P(x, y) + y'Q(x, y) = 0$ se dice homogénea si los campos P y Q son homogéneos del mismo grado y, en tal caso, el cambio de variable $y = xz$ la transforma en una ecuación de variables separables.

Ecuaciones $\boldsymbol{y' = f(ax + by + c)}$. Estas ecuaciones se resuelven fácilmente utilizando el cambio de variable $z = ax + by + c$, que conduce siempre a una ecuación en variables separables en x y z.

Ecuaciones $\boldsymbol{y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)}$. Estas ecuaciones se resuelven de acuerdo al siguiente esquema:

- Si $c_1 = c_2 = 0$, la ecuación es homogénea (ver más arriba en esta sección).
- Si $a_1b_2 = b_1a_2$, el cambio de variable $z = a_1x + b_1y$ conduce a una ecuación en variables separables con incógnita z.
- Si $a_1b_2 \neq b_1a_2$, el sistema de ecuaciones (numéricas)

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

  tiene solución única, (α, β) y el cambio de variables $t = x - \alpha$, $z = y - \beta$, conduce a una ecuación homogénea donde t es la variable independiente y z es la incógnita.

Ecuaciones de Bernouilli. Las ecuaciones de la forma

$$y' + yp(x) = y^n q(x)$$

se denominan ecuaciones de Bernouilli. Para $n = 0$ esta ecuación es una ecuación lineal, para $n = 1$ esta ecuación es una ecuación en variables separables y, en otro caso, podemos dividir ambos miembros de la igualdad por y^n y aplicar el cambio de variable $z(x) = (y(x))^{1-n}$ que conduce a una ecuación lineal.

Ecuaciones de Riccati. Las ecuaciones de la forma

$$y' + p(x)y^2 + q(x)y = r(x)$$

se denominan ecuaciones de Riccati. No es posible dar un método de resolución general para este tipo de ecuaciones, sin embargo, sí es posible llegar a su solución general en el caso en que se conozca una *solución particular* que deberá ser calculada "a ojo". Supongamos que $\varphi(x)$ es una solución de la ecuación de Riccati; en este caso, el cambio de variable $z = y - \varphi(x)$ conduce a una ecuación de Bernouilli con incógnita z.

5.2.10. Trayectorias ortogonales

Un problema geométrico y físico que se puede abordar fácilmente con ecuaciones diferenciales es la descripción de familias de curvas. Esta representación facilita, entre otras casos, el cálculo de sus *curvas ortogonales.*

Tal y como hemos estudiado anteriormente en el curso, la ecuación

$$U(x, y) = C$$

describe la familia de curvas que son curvas de nivel del campo f. Derivando ambos lados de la igualdad respecto de x (consideramos que la variable y es dependiente de x), eliminamos el parámetro C y obtenemos una ecuación diferencial que describe la misma familia de curvas:

$$\mathrm{D}_1 U(x, y) + y' \mathrm{D}_2 U(x, y) = 0$$

Supongamos ahora que queremos hallar la familia de curvas ortogonales a una familia dada, es decir, *la familia de curvas que se intersecan ortogonalmente en cada punto con familia dada.*

TEOREMA 5.2.11 *La familia de curvas ortogonales a las soluciones de* $y' = f(x, y)$ *es la familia de soluciones de la ecuación* $y' = -\dfrac{1}{f(x, y)}$.

Este resultado es una consecuencia inmediata del hecho de que y' es la pendiente de la curva en cada punto y de que, si m y m' son las pendientes de dos rectas ortogonales, entonces $mm' = -1$.

EJEMPLO 5.2.11 Para hallar la familia de curvas ortogonal a $y = Cx$, despejamos en primer lugar el parámetro C para expresar esta familia como ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} y &= Cx \\ \frac{y}{x} &= C \\ \frac{xy' - y}{x^2} &= 0 \\ y - xy' &= 0 \end{aligned}$$

El teorema anterior se puede aplicar de forma más directa sustituyendo en la ecuación anterior y' por $-1/y'$ para obtener la ecuación de la familia ortogonal:

$$\begin{aligned} y + \frac{x}{y'} &= 0 \\ y &= -\frac{x}{y'} \\ yy' &= -x \\ \int y \, \mathrm{d}y &= -\int x \, \mathrm{d}x \\ \frac{y^2}{2} &= -\frac{x^2}{2} + C_1 \\ y^2 + x^2 &= C \end{aligned}$$

Es decir, la familia ortogonal son las circunferencias centradas en el origen.

—

Ejercicios básicos

1. Distinga si las siguientes expresiones son ecuaciones diferenciales y determine el tipo (ordinarias o en derivadas parciales) y el orden.

   (a) $x^2 + 3y^2 = 5xy$ (b) $x^2 + 3y'' - 5(y')^3 = 0$

   (c) $1 + y + y'' + y''' = 0$ (d) $xy - y' \operatorname{sen} x$

   (e) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \operatorname{sen} x = \mathrm{e}^x$ (f) $5\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3xyz$

2. Consideremos la ecuación $y' + 2y = 0$. Se pide:

   a) Estudiar la existencia y unicidad de soluciones.

   b) Comprobar que la función $y = C\mathrm{e}^{-2x}$ es una solución general.

   c) Determinar la solución particular que pasa por el punto $(0, 3)$.

3. Compruebe que las funciones de la forma $y = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x}$ son soluciones de la ecuación $y'' - y = 0$ y halle soluciones para:

   a) el problema de condiciones iniciales: $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

   b) el problema de condiciones de *frontera*: $y(0) = 0, y(1) = 1$.

   c) el problema de condiciones *generales*: $y(0) = 0, y''(0) = 0$.

   d) el problema de condiciones *generales*: $y(0) = 0, y''(0) = 1$.

4. Compruebe que la ecuación $xyy' - \log x = 0$ es de variables separables y resuélvala.

5. Consideremos la ecuación diferencial $y' = y^2 - 4$. Se pide

   a) Estudiar la existencia y unicidad de soluciones

   b) Resolver la ecuación y obtener la solución general.

   c) Calcular la solución particular que pasa por $(0, 0)$.

   d) Calcular las soluciones singulares que pasan por $(0, 2)$ y $(0, -2)$.

6. Compruebe que la ecuación $(2x - 3y) + (2y - 3x)y' = 0$ es exacta y resuélvala.

7. Pruebe que la ecuación $(x^2 + 2xy - y^2) + (y^2 + 2xy - x^2)y' = 0$ admite un factor que depende solo de $x + y$ y resuelva la ecuación.

8. Estudie en que condiciones una ecuación admite un factor integrante que sólo depende de x^2y y utilice dicha condición para resolver la ecuación $-y^2 + (x^2 + xy)y' = 0$.

9. Consideremos la ecuación lineal $(y-1)\operatorname{sen} x - y' = 0$. Se pide:

   a) Resolver la ecuación lineal por el método de variación de las constantes.

   b) Las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales también se pueden resolver utilizando un factor integrante que sólo depende de x. Aplique este método para resolver la ecuación.

   c) Resuelva la ecuación diferencial lineal $y' + \frac{y}{x} = 3x + 4$ de dos formas distintas: variación de las constantes y factor integrante.

10. Estudie la seccion 5.2.9, compruebe que $y' = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$ es una ecuación homogénea y resuélvala.

11. Estudie la seccion 5.2.9, identifique la ecuación $y' = \operatorname{tg}^2(x+y)$ y resuélvala.

12. Estudie la seccion 5.2.9 para saber identificar y resolver las siguientes ecuaciones:

$$a)\ y' = \frac{x+y}{2x} \qquad b)\ y' = \frac{1-x-y}{x+y} \qquad c)\ y' = \frac{x+2y+1}{2x+y+3}$$

13. Estudie la seccion 5.2.9, compruebe que la ecuación $y' + \frac{y}{x} = x\sqrt{y}$ es de Bernouilli y resuélvala.

14. Estudie la seccion 5.2.9, compruebe que $y' = 2x^2 + \dfrac{1}{x}y - 2y^2$ es una ecuación de Ricatti y que $\varphi(x) = x$ es una solución; resuelva la ecuacion.

15. Estudie la sección 5.2.10 y halle la familia de curvas ortogonal a

$$x^2 + y^2 = C.$$

16. Entre los modelos estudiados en el tema, determine el tipo de ecuación diferencial e indique la forma de resolverla:

(a)	$y' = \operatorname{sen}(x+y)$	(b)	$\mathrm{e}^x y y' = \mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{-2x-y}$
(c)	$y' + 2y = \operatorname{sen} x$	(d)	$2y^2\mathrm{e}^{xy^2} + 2xyy'\mathrm{e}^{xy^2} = 0$
(e)	$(2+x)y' = 3y$	(f)	$y' + 3xy = xy^3$
(g)	$y' = \dfrac{3x+2y}{x}$	(h)	$2\cos(2x-y) - y'\cos(2x-y) = 0$
(i)	$y' = -2 - y + y^2$	(j)	$y' = 2x^2 + \dfrac{1}{x}y - 2y^2$
(k)	$y' - y = x^3\sqrt[3]{y}$	(l)	$y' = \dfrac{x-y-3}{x+y-1}$
(m)	$y' = 1 + \mathrm{e}^{y-x+5}$	(n)	$(x-1)y' + y = x^2 - 1$
(o)	$y' = \dfrac{x^2+y^2}{2xy}$	(p)	$y' + 2xy = 2x$

Relación de ejercicios

1. Para calcular algunas integrales del tipo $\int f(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$ se puede utilizar el cambio de variable $t = \mathrm{e}^x$. Aplique este cambio a las siguientes integrales y determine el tipo de integral resultante:

$$(a)\quad \int \frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x \qquad (b)\quad \int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^x+1)}\,\mathrm{d}x$$

2. Calcular la integral $\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$ aplicando los siguientes métodos:

   a) Integración inmediata o cambio de variable directo.

   b) Integración por partes.

3. Calcule las siguientes integrales utilizando los métodos de integración inmediata o por cambio de variable directo:

$$(1)\quad \int \mathrm{d}x \qquad (2)\quad \int 27\,\mathrm{d}x$$
$$(3)\quad \int 4x^5\,\mathrm{d}x \qquad (4)\quad \int (4x^2-3x+1)\,\mathrm{d}x$$
$$(5)\quad \int (2x^2-5)^3\,\mathrm{d}x \qquad (6)\quad \int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$
$$(7)\quad \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x \qquad (8)\quad \int \frac{3x^5}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$
$$(9)\quad \int (3x+4)^{2007}\,\mathrm{d}x \qquad (10)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{(3x+4)^4}$$
$$(11)\quad \int x(3x^2-5)^7\,\mathrm{d}x \qquad (12)\quad \int \sqrt[5]{5x+6}\,\mathrm{d}x$$
$$(13)\quad \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad (14)\quad \int \frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}}{4+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$(15)\quad \int \frac{\operatorname{arc\,cos} x - x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \qquad (16)\quad \int a^{2x}\,\mathrm{d}x$$
$$(17)\quad \int (\mathrm{e}^{2x}+2)^5\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \qquad (18)\quad \int \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}$$
$$(19)\quad \int \frac{8x^2}{x^3-2}\,\mathrm{d}x \qquad (20)\quad \int \frac{3x^2-4x}{x^3-2x^2+1}\,\mathrm{d}x$$
$$(21)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{tg} x} \qquad (22)\quad \int x^2\cos(x^3-7)\,\mathrm{d}x$$
$$(23)\quad \int \cos 3x\,\mathrm{e}^{\operatorname{sen} 3x}\,\mathrm{d}x \qquad (24)\quad \int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$
$$(25)\quad \int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}\,\mathrm{d}x \qquad (26)\quad \int \frac{\operatorname{senh}\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$

4. Calcule las siguientes integrales utilizando el método de integración por partes:

$$\begin{array}{ll} (1) \quad \displaystyle\int x \operatorname{sen} 5x \, \mathrm{d}x & (2) \quad \displaystyle\int x^2 \ln(x) \, \mathrm{d}x \\ (3) \quad \displaystyle\int x \operatorname{arc\,tg} x \, \mathrm{d}x & (4) \quad \displaystyle\int x^3 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \\ (5) \quad \displaystyle\int x^2 \log x \, \mathrm{d}x & (6) \quad \displaystyle\int x^3 \cos x^2 \\ (7) \quad \displaystyle\int x^3 \sqrt{4-x^2} \, \mathrm{d}x & (8) \quad \displaystyle\int \frac{x^3 \, \mathrm{d}x}{\sqrt[3]{9-x^2}} \\ (9) \quad \displaystyle\int \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x & (10) \quad \displaystyle\int \cos(\log x) \, \mathrm{d}x \\ (11) \quad \displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} x \, \mathrm{d}x & (12) \quad \displaystyle\int \operatorname{arc\,sen}(x) \, \mathrm{d}x \end{array}$$

5. Calcule las siguientes integrales aplicando un cambio de variable directo:

$$(1) \quad \int \frac{\ln \ln x}{x} \, \mathrm{d}x \qquad (2) \quad \int x \cos^2 x^2 \, \mathrm{d}x$$

6. Calcule las siguientes integrales del tipo $\displaystyle\int f(\mathrm{e}^x) \, \mathrm{d}x$:

$$\begin{array}{lll} (1) \quad \displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}} & (2) \quad \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x}} & (3) \quad \displaystyle\int (\mathrm{e}^{2x}+2)^5 \mathrm{e}^{2x} \, \mathrm{d}x \\ (4) \quad \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}} \, \mathrm{d}x & (5) \quad \displaystyle\int \frac{-2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-1} \, \mathrm{d}x & (6) \quad \displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x - 3\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x} \, \mathrm{d}x \end{array}$$

7. Para calcular algunas integrales del tipo $\displaystyle\int f(\sqrt{x}) \, \mathrm{d}x$ puede resultar útil aplicar el cambio de variable $t = \sqrt{x}$. Utilice este cambio para calcular las siguientes integrales:

$$(1) \quad \int \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x \qquad (2) \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sqrt{x}-1}} \qquad (3) \quad \int (1-x^2)\sqrt{x} \, \mathrm{d}x$$

8. Calcule las siguientes integrales racionales:

$$\begin{array}{ll} (1) \quad \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} & (2) \quad \displaystyle\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8} \, \mathrm{d}x \\ (3) \quad \displaystyle\int \frac{2x^3+x^2+4}{x^2+4} \, \mathrm{d}x & (4) \quad \displaystyle\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} \, \mathrm{d}x \\ (5) \quad \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2-2x+1} & (6) \quad \displaystyle\int \frac{2x^2-3x+3}{x^3-x^2+x-1} \, \mathrm{d}x \\ (7) \quad \displaystyle\int \frac{2x^2+2x-2}{x^3+2x} \, \mathrm{d}x & (8) \quad \displaystyle\int \frac{3x^3+3x^2-5x+7}{x^4-1} \, \mathrm{d}x \\ (9) \quad \displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-5x+7} \, \mathrm{d}x & (10) \quad \displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+2x+1}{(x^2-x+1)^2} \, \mathrm{d}x \\ (11) \quad \displaystyle\int \frac{x+4}{(x^2-x+1)^2} \, \mathrm{d}x & (12) \quad \displaystyle\int \frac{3x^5+10x^4+32x^3+43x^2+44x+36}{(x^2+4x+4)(x^4+8x^2+16)} \, \mathrm{d}x \end{array}$$

9. Utilice los números complejos para calcular las siguientes integrales trigonométricas:

$$(1)\quad \int \operatorname{sen}^4 x\,\mathrm{d}x \qquad (2)\quad \int \cos^5 x\,\mathrm{d}x \qquad (3)\quad \int \cos^6 x\,\mathrm{d}x$$

10. Calcule las siguientes integrales trigonométricas.

$$(1)\quad \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x \quad (2)\quad \int \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x\,\mathrm{d}x \quad (3)\quad \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\operatorname{sen}^3 x + 2\cos^2 x \operatorname{sen} x}$$
$$(4)\quad \int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x \quad (5)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} \quad (6)\quad \int \operatorname{sen}(2x)\cos x\,\mathrm{d}x$$
$$(7)\quad \int \sec x\,\mathrm{d}x \quad (8)\quad \int \sec x \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x \quad (9)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$$

11. Escriba las siguientes expresiones sin utilizar funciones trigonométricas:

$$(1)\quad \operatorname{sen}(\operatorname{arc}\cos x) \qquad (2)\quad \operatorname{sen}^2(2\operatorname{arc}\cos x)$$
$$(3)\quad \cos(2\operatorname{arc}\operatorname{sen} x) \qquad (4)\quad \operatorname{senh}(\operatorname{argcosh} x)$$

12. Resuelva las siguientes integrales irracionales.

$$(1)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{28-12x-x^2}} \qquad (2)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2-4x+4}}$$
$$(3)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+4x-4}} \qquad (4)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}$$

13. Calcule las siguientes integrales

$$(1)\quad \int \frac{x}{\cos^2 x^2}\,\mathrm{d}x \qquad (2)\quad \int \operatorname{tg}^4 x\,\mathrm{d}x$$
$$(3)\quad \int \frac{\operatorname{arc}\operatorname{tg} x}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x \qquad (4)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{x+2}}$$
$$(5)\quad \int \frac{\operatorname{sen} 2x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \qquad (6)\quad \int \operatorname{arc}\operatorname{tg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$
$$(7)\quad \int \log\left(x\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x \qquad (8)\quad \int \frac{x}{a^2+x^4}\,\mathrm{d}x$$
$$(9)\quad \int 3x^2y + 3xy^2 - xy\,\mathrm{d}x \quad (10)\quad \int 3x^2y + 3xy^2 - xy\,\mathrm{d}y$$
$$(11)\quad \int x\operatorname{sen}(x^2y)\,\mathrm{d}x \qquad (12)\quad \int x\operatorname{sen}(x^2y)\,\mathrm{d}y$$
$$(13)\quad \int x\operatorname{sen}(xy)\,\mathrm{d}x \qquad (14)\quad \int x\operatorname{sen}(xy)\,\mathrm{d}y$$
$$(15)\quad \int \frac{\ln x^2}{x}\,\mathrm{d}x$$

14. Compruebe que las funciones de la forma $y = c_1x + c_2x\log x$ son soluciones de la ecuación $x^2y'' - xy' + y = 0$ y proporcione una solución para el problema de condiciones iniciales: $y(1) = 3, y'(1) = -1$.

15. Compruebe que la función $y = C_1 \operatorname{sen} 3x + C_2 \cos 3x$ es una solución general de la ecuación $y'' + 9y = 0$ y proporcione la solución particular que pasa por el punto $x = \pi/6$, $y = 2$, $y' = 1$.

16. Compruebe que la función $y = C_1 + C_2 \log x$ es una solución general de la ecuación $xy'' + y' = 0$ y proporcione la solución particular que pasa por el punto $x = 2$, $y = 0$, $y' = 1/2$.

17. Compruebe que las funciones de la forma $y = c_1x^2 + c_2x^4 + 3$ son soluciones de la ecuación $x^2y'' - 5xy' + 8y = 24$. Encontrar si es posible una solución para los siguiente problemas asociados a esta ecuación

    (a) $y(0) = 2, y'(0) = 1$ (b) $y(-1) = 0, y(1) = 4$
    (c) $y(1) = 1, y'(1) = 2$ (d) $y(0) = 1, y(1) = 2$
    (e) $y(0) = 3, y(1) = 2$ (f) $y(1) = 3, y(2) = 15$

18. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

    $y' = \dfrac{x}{y}$ $y' = \dfrac{x^2+2}{3y^2}$
    $(2+x)y' = 3y$ $xy' = y$
    $yy' = \operatorname{sen} x$ $y'\sqrt{1-4x^2} = y$
    $y'\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2} = 0$ $\dfrac{y'y}{\log x} = \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2$
    $y' = \exp(3x+2y)$ $\mathrm{e}^x yy' = \mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{-2x-y}$

19. Entre los siguientes apartados, encuentre las ecuaciones diferenciales exactas que haya y resuélvalas:

    $2y^2\mathrm{e}^{xy^2} + 2xyy'\mathrm{e}^{xy^2} = 0$ $(4x^3 - 6xy^2) + (4y^3 - 6xy)y' = 0$
    $\frac{1}{x^2+y^2}(xy' - y) = 0$ $(y + (x + \operatorname{tg} xy)y')\mathrm{e}^y \cos xy = 0$
    $(x + yy')\exp(-x^2 - y^2) = 0$ $2\cos(2x - y) - y'\cos(2x - y) = 0$
    $\frac{1}{(x-y)^2}(y^2 - x^2y') = 0$ $(3y^2 + 10xy^2) + (6xy - 2 + 10x^2y)y' = 0$
    $y\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x y' = 0$

20. En los siguientes apartados halle el factor integrante (en función sólo de x o sólo de y) y úselo para resolver las ecuaciones:

    $y + (x + 6y^2)y' = 0$ $(2x^3 + y) + xy' = 0$
    $(5x^2 - y) + xy' = 0$ $(5x^2 - y^2) + 2yy' = 0$
    $(x + y) + y' \operatorname{tg} x = 0$ $(2x^2y - 1) + x^3y' = 0$
    $y^2 + (xy - 1)y' = 0$ $(x^2 + 2x + y) + 2y' = 0$
    $2y + (x - \operatorname{sen}\sqrt{y})y' = 0$ $(-2y^3 + 1) + (3xy^2 + x^3)y' = 0$

21. Pruebe que la ecuación $y - xy' = 0$ admite factores integrantes que

    a) dependen solo de x,

b) dependen solo de y,

c) dependen solo de xy.

22. Pruebe que la ecuación $(-xy\,\mathrm{sen}\,x + 2y\cos x) + 2xy'\cos x = 0$ admite un factor que depende solo de xy y utilícelo para resolverla.

23. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden:

$y' + 2\frac{y}{x} = 3x + 1$ $\qquad$ $y' = \mathrm{e}^x - y$

$y' + 2y = \mathrm{sen}\,x$ $\qquad$ $y' - y = \cos x$

$y' + 2xy = 2x$ $\qquad$ $(3y + \mathrm{sen}\,2x) - y' = 0$

$(x-1)y' + y = x^2 - 1$ $\qquad$ $y' + 5y = \mathrm{e}^{5x}$

24. Compruebe que las siguientes ecuaciones diferenciales son homogéneas y resuélvalas:

$y' = \dfrac{2x+y}{y}$ $\qquad$ $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$

$y' = \dfrac{x^2+y^2}{2xy}$ $\qquad$ $y' = \dfrac{3x+2y}{x}$

25. Resuelva las siguientes ecuaciones utilizando un cambio de variable:

$y' = (x+y+1)^2$ $\qquad$ $y' = \mathrm{tg}^2(x+y)$

$y' = 2 + \sqrt{y-2x+3}$ $\qquad$ $y' = \mathrm{sen}(x+y)$

$y' = 1 + \mathrm{e}^{y-x+5}$ $\qquad$ $y' = \dfrac{x-y-3}{x+y-1}$

$y' = \dfrac{x+y-6}{x-y}$

26. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de Bernouilli:

$y' + 3xy = xy^3$ $\qquad$ $y' + 2xy = xy^2$ $\qquad$ $y' + \frac{y}{x} = xy^2$

$y' - y = x^3\sqrt[3]{y}$ $\qquad$ $yy' - 2y^2 = \mathrm{e}^x$

27. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de Riccati utilizando la solución particular dada:

$y' = -2 - y + y^2$, $\varphi(x) = 2$ $\qquad$ $y' = \mathrm{e}^{2x} + (1 + 2\mathrm{e}^x)y + y^2$, $\varphi(x) = -\mathrm{e}^x$

$y' = 1 - x - y + xy^2$, $\varphi(x) = 1$ $\qquad$ $y' = \sec^2 x - y\,\mathrm{tg}\,x + y^2$, $\varphi(x) = \mathrm{tg}\,x$

$y' = 2x^2 + \dfrac{1}{x}y - 2y^2$, $\varphi(x) = x$ $\qquad$ $y' = -\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{1}{x}y + y^2$, $\varphi(x) = \dfrac{2}{x}$

$y' + y^2 + \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x^2}$, $\varphi(x) = -1/x$

28. Determine el tipo de curvas que corresponden a cada familia y halle sus trayectorias ortogonales:

(*a*) $x^2 = Cy$ $\qquad$ (*b*) $2x^2 - y^2 = C$

(*c*) $y^2 = 2Cx$ $\qquad$ (d) $x^2 + y^2 = 2ax$

29. Calcule las trayectorias ortogonales a cada una de las siguientes familias de funciones:

(*a*) $y^2 = Cx^3$ $\qquad$ (*b*) $y = C\mathrm{e}^x$ $\qquad$ (*c*) $y = C\,\mathrm{sen}\,x$

TEMA 6

Integración

Objetivos: Los objetivos son: (1) saber calcular integrales definidas en una variable y utilizarlas para abordar problemas geométricos y trabajar con series de Fourier; (2) saber calcular integrales definidas en dos variables mediante el teorema de Fubini y el teorema de cambio de variable; (3) utilizar integración para resolver problemas geométricos y físicos.

Prerrequisitos: Haber cubierto los objetivos de los temas anteriores.

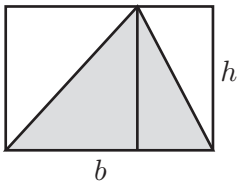
Contenido:

- Lección 6.1 Integración de funciones de una variable. Integral de Riemannn. Teorema fundamental del cálculo y regla de Barrow. Integración por partes y cambio de variable en las integrales definidas. Aplicaciones geométricas. Series de Fourier.
- Lección 6.2 Integración de campos escalares. Integral de Riemannn para campos escalares. Teorema de Fubini. Campos vectoriales y teorema de cambio de variable. Aplicaciones.

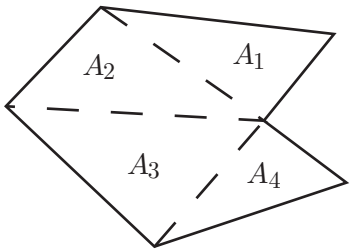
LECCIÓN 6.1

Integración de funciones de una variable

El contenido de esta lección está dedicado a la *integral de Riemannn* o *integral definida* de funciones de una variable. Aunque utilizaremos el cálculo de áreas para introducir los conceptos, las aplicaciones de la integral definida son múltiples, tanto en las matemáticas como en las distintas áreas de ingeniería.

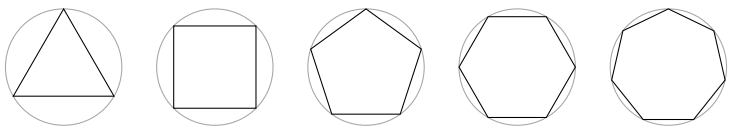


Seguramente el alumno recuerde toda una colección de fórmulas para calcular el área de polígonos. Todas esas fórmulas tienen como punto de partida la definición del área de un rectángulo: *el área de un rectángulo es el producto de sus dimensiones.* A partir de esta definición, podemos calcular el área de cualquier polígono. Por ejemplo, en la figura de la izquierda, podemos ver que el área de un triángulo de base b y altura h es $A = \frac{1}{2}bh$. Además, el área de cualquier otra *región poligonal* se puede calcular dividiéndola en triángulos.

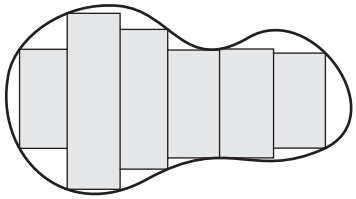


$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

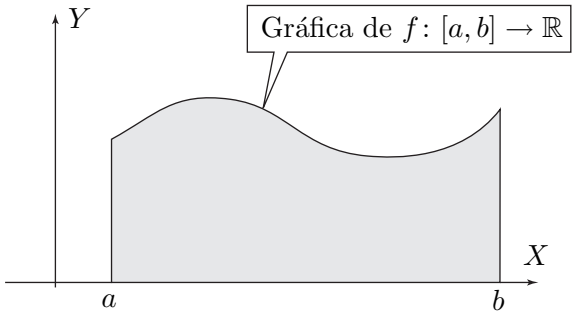
Pero, ¿cómo calculamos el área encerrada por una curva? No podemos obtener de forma directa una expresión para esa área, por lo que, en estos casos, buscamos un procedimiento para aproximar su valor. Por ejemplo, en la antigüedad, utilizaban polígonos regulares inscritos en un círculo para aproximar el valor de su área; cuantos más lados tomemos, mejor será esta aproximación.



En una región arbitraria, también podemos utilizar este procedimiento, por ejemplo, inscribiendo franjas rectangulares podemos mejorar la aproximación si las tomamos cada vez más estrechas.

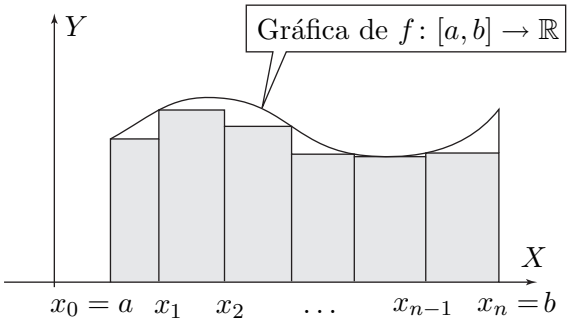


Este es el punto de partida para definir la integral definida de una función de una variable. Para poder hacer los cálculos de las áreas necesitamos conocer las dimensiones de los rectángulos inscritos y por eso el área que resulta más fácil de calcular es la región que queda entre el grafo de la función de una variable y el eje OX entre dos puntos de abscisas $x = a$ y $x = b$.



Aunque tiene sentido estudiar la integrabilidad de cualquier función acotada, a lo largo del tema vamos a trabajar solamente con funciones continuas *a trozos*. Veremos que todas las funciones continuas son integrables, aunque hay funciones integrables que no son continuas; el estudio de dichas funciones queda fuera de los objetivos del curso.

Volviendo al ejemplo de la figura de arriba, podemos plantear en primer lugar aproximar el área de la región tomando franjas rectangulares que queden estrictamente dentro de la región, es decir, obtener una *aproximación por defecto*.



Para ello, elegimos un conjunto de puntos del intervalo $[a, b]$, que llamamos *partición*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Las bases de los rectángulos serán las diferencias $(x_i - x_{i-1})$ y las alturas serán los valores mínimos que tome la función en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$,

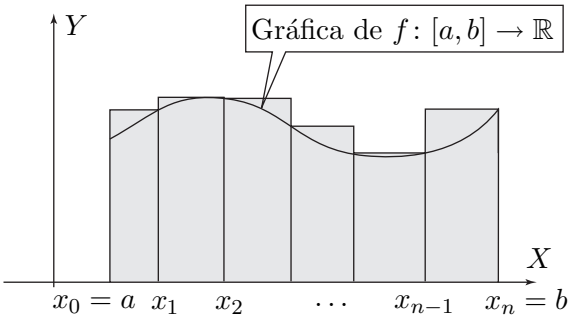
$$m_i = \text{mín}\{f(t); t \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Recordemos que estos valores existen porque estamos suponiendo que la función f es continua. De esta forma, ya podemos calcular la aproximación por defecto del área,

$$L_P = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),$$

y que llamamos *suma inferior* de f para la partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

También podemos hallar una *aproximación por exceso* del área.



Para ello, tomamos la misma partición y en lugar de los valores mínimos en cada subintervalo, tomamos los valores máximos como alturas de las franjas rectangulares:

$$M_i = \text{máx}\{f(t); t \in [x_{i-1}, x_i]\}$$
$$U_P = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

Esta aproximación U_P se denomina *suma superior* de f para la partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

Es evidente que, para cada partición, el área exacta siempre estará entre cada suma inferior y cada suma superior,

$$L_P \leq A \leq U_P.$$

Además, las aproximaciones mejoran a medida que añadimos puntos a la partición y reducimos la distancia entre ellos. En el *límite*, las aproximaciones por defecto y por exceso se encontrarían para darnos el valor del área.

DEFINICIÓN 6.1.1 *Una función f acotada sobre $[a,b]$ se dice* integrable *en $[a,b]$ si:*

$$\sup\{L_P : P \text{ Partición de } [a,b]\} = \text{ínf}\{U_P : P \text{ Partición de } [a,b]\}$$

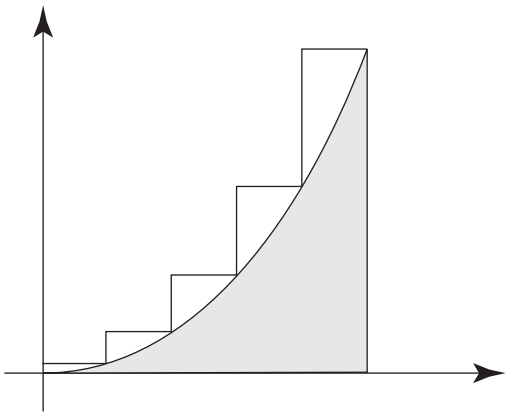
En tal caso, este número recibe el nombre de integral *de f sobre $[a,b]$ y se denota por $\int_a^b f$ o $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (el símbolo $\mathrm{d}x$ se usa para indicar la variable de la función).*

Como ya habíamos anunciado, las funciones continuas son integrables en cada intervalo cerrado.

TEOREMA 6.1.2 *Toda función continua en un intervalo cerrado I, es integrable en ese intervalo.*

En la definición 6.1.1 hemos utilizado los operadores sup e ínf que devuelven el límite o extremo superior y el límite o extremo inferior de un conjunto de números. En general, no es fácil calcular estos valores, aunque en algunos casos es posible hacerlo utilizando técnicas de cálculo de límites si sabemos que la función es integrable.

EJEMPLO 6.1.1 Vamos a calcular el área que queda entre la parábola $y = x^2$ y el eje OX en el intervalo $[0,1]$.



En lugar de trabajar con todas las particiones posibles, es suficiente considerar las particiones $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\}$, que se denominan *particiones regulares en n subintervalos*, ya que cada uno de ellos tiene la misma amplitud. Esta familia es en realidad una sucesión y por lo tanto, las sumas superiores o inferiores asociadas son sucesiones numéricas y determinamos el ínfimo y el

supremo utilizando límites:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x &= \text{ínf}\{U_P : P \text{ Partición de } [0,1]\} \\ &= \lim U_{P_n} = \lim \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \lim \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \lim \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \lim \frac{1}{n^3}(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \\ &= \lim \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

La primera igualdad del desarrollo anterior tiene sentido porque la función x^2 es continua y por lo tanto integrable. ——

Otra forma de simplificar el cálculo es usando *sumas de Riemannn*. Dada una partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de un intervalo $[a, b]$, y un conjunto de puntos $\xi = \{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ tal que $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ para cada i, llamamos suma de Riemannn de f para P y ξ a:

$$R_P^\xi = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}),$$

Si la función f es continua, las sumas de Riemannn también convergen a la integral. Como veremos más adelante, las sumas de Riemannn serán una herramienta más flexible para justificar que una determinada magnitud puede ser calculada usando una integral. Debemos recordar que las integrales no sirven únicamente para calcular áreas, aunque este ha sido el modelo que hemos utilizado para presentar el concepto.

Teorema 6.1.3 *Si f es una función continua y positiva en el intervalo $[a, b]$, entonces la integral definida $\int_a^b f$ es el valor del área de la región comprendida entre el grafo de f y el eje OX en dicho intervalo.*

Ejemplo 6.1.2 El área de un círculo se puede calcular a partir de la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Si consideremos el intervalo $[0, r]$, la región entre el grafo de f y el eje OX es un cuarto de círculo y por lo tanto:

$$A = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \mathrm{d}x = \left[2r^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{r} + 2x\sqrt{r^2 - x^2} \right]_0^r = \pi r^2$$

No incluimos los detalles del cálculo de la primitiva puesto que ya ha sido resuelta en el tema anterior. ——

El siguiente resultado nos da la expresión para calcular el área comprendida entre las gráficas de dos funciones.

COROLARIO 6.1.4 *Si f y g son dos funciones continuas en un intervalo $[a, b]$ entonces el área que queda encerrada entre las gráficas de las dos funciones es*

$$A = \int_a^b |g(x) - f(x)| \mathrm{d}x$$

Para poder calcular la integral del corolario anterior, es necesario hacer uso de la propiedad de aditividad para eliminar, en primer lugar, el valor absoluto; para ello, debemos determinar los puntos de corte de las dos gráficas y por lo tanto los intervalos en los que la diferencia de las dos funciones es positiva o negativa.

6.1.1. Teoremas y propiedades fundamentales

Aunque hemos podido calcular una integral definida usando límites de sucesiones, este procedimiento dista mucho de ser eficaz. Las sumas de Riemannn serán la herramienta teórica fundamental para la aplicación de la integral a determinados modelos matemáticos o físicos, pero no son una herramienta de cálculo. El resultado central para abordar este objetivo es el *Teorema fundamental del cálculo*, que relaciona los dos conceptos básicos del *Cálculo infinitesimal*, la derivación y la integración.

TEOREMA 6.1.5 (TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO) *Sea f una función continua en $[a, b]$, y consideremos la función F definida como:*

$$F(t) = \int_a^t f$$

Entonces, F es derivable y $F' = f$

En el tema anterior hemos definido y trabajado con el concepto de *primitiva* de una función, pero no hemos podido saber hasta ahora para qué funciones existe primitiva. El teorema fundamental del cálculo resuelve este problema: toda función continua en un intervalo cerrado admite una primitiva en ese intervalo (aunque no esté expresada en términos de funciones elementales). Como corolario de este teorema obtenemos la *Regla de Barrow*.

TEOREMA 6.1.6 (REGLA DE BARROW) *Si f es continua en $[a,b]$ y $f = F'$, entonces*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \overset{(Notación)}{=} \Big[F(x)\Big]_a^b$$

EJEMPLO 6.1.3 Vamos a calcular de nuevo el área de la región del ejemplo 6.1.1 usando la regla de Barrow:

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \qquad \text{——}$$

El hecho de tener un resultado tan potente como la Regla de Barrow para calcular integrales definidas no debe llevarnos a la conclusión errónea de que podemos olvidar la definición de integral. Por otra parte, la regla de Barrow solo es útil para aquellas funciones que admiten una primitiva *expresable en términos de funciones elementales*, y ya sabemos que no todas las funciones continuas admiten este tipo de primitivas. En estos casos, podríamos recurrir a métodos de aproximación, entre los cuales se encuentra la evaluación de sumas de Riemannn.

El siguiente resultado recoge las propiedades algebraicas y otras propiedades elementales de la integral definida.

TEOREMA 6.1.7 *Sean f y g dos funciones integrables en I y sea $[a,b] \subset I$. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

1. $\displaystyle\int_a^b (f \pm g) = \left(\int_a^b f\right) \pm \left(\int_a^b g\right)$.
2. $\displaystyle\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$ *para cualquier* $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. $\displaystyle\int_a^b f = \left(\int_a^c f\right) + \left(\int_c^b f\right)$ *para cualquier* $c \in I$.
4. $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$

Como herramientas para el cálculo de primitivas, hemos estudiado en el tema anterior el método de integración por partes y los métodos de sustitución. Volvemos a recoger a continuación estos resultados pero aplicados a la integral definida.

TEOREMA 6.1.8 (CAMBIO DE VARIABLE DIRECTO) *Sean g continua en $[a,b]$ y tal que g' existe y es continua, y sea f continua entre $g(a)$ y $g(b)$, entonces:*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\mathrm{d}u$$

La ventaja de usar este resultado, y los siguientes, está en que, para calcular una integral definida, no necesitaremos completar el proceso de cálculo de la primitiva deshaciendo los cambios de variable que apliquemos. Bastará con modificar los límites de integración usando la función que da el cambio de variable.

En el segundo resultado de cambio de variable debemos tener en cuenta que la función del cambio debe ser biyectiva.

COROLARIO 6.1.9 (CAMBIO DE VARIABLE INVERSO) *Sea f una función continua en $[\alpha, \beta]$. Consideremos una función $g\colon I \to [\alpha, \beta]$ biyectiva, continua y con primera derivada continua. Entonces,*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x = \int_{g^{-1}(\alpha)}^{g^{-1}(\beta)} f(g(u))g'(u)\mathrm{d}u$$

EJEMPLO 6.1.4 En el ejemplo 6.1.2 hemos calculado el área de un círculo de radio r utilizando una primitiva que se calculó en el tema anterior. Vamos a repetir el mismo cálculo pero realizando el cambio de n la integral definida.

$$\begin{aligned}
A =& 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\mathrm{d}x \\
& \left[\begin{array}{l} x = r\,\mathrm{sen}\,\theta \text{ (esta función es biyectiva en } [0, \pi/2]) \\ \mathrm{d}x = r\cos\theta\mathrm{d}\theta \\ x = 0 \to \theta = 0 \\ x = r \to \theta = \pi/2 \end{array}\right. \\
=& 4\int_0^{\pi/2} r^2\cos^2\theta\mathrm{d}\theta = 4r^2\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
=& 4r^2\left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,2\theta\right]_0^{\pi/2} = 4r^2\frac{\pi}{4} = \pi r^2
\end{aligned}$$

Podemos observar que al evitar deshacer los cambios, las expresiones que manejamos son más simples. ——

La técnica de integración por partes también tiene su enunciado correspondiente con integrales definidas.

TEOREMA 6.1.10 (INTEGRACIÓN POR PARTES) *Sean f y g dos funciones tales que f' y g' son continuas, entonces:*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\mathrm{d}x$$

Aparentemente, este resultado no conlleva ninguna ventaja de forma aislada, pero es útil para usarlo conjuntamente con los cambios de variable.

Ejemplo 6.1.5 Utilizamos el resultado anterior para calcular la siguiente integral definida

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x \ln \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$$

Para ello, utilizamos el cambio de variable

$$t = \operatorname{sen} x, \quad \mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x$$

Los límite de integración se modifican de la siguiente forma: para $x = \pi/6$, el valor de t es $1/2$, mientras que para $x = \pi/2$ el valor de t es 1.

$$\begin{aligned}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x \ln \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x &= \int_{1/2}^{1} \ln t \, \mathrm{d}t \\ &\left[\begin{array}{l} u = \ln t \to \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{t} \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}t \to v = t \end{array}\right. \\ &= \Big[t \ln t\Big]_{1/2}^{1} - \int_{1/2}^{1} \mathrm{d}t = -\frac{\ln(1/2)}{2} - \Big[t\Big]_{1/2}^{1} = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

6.1.2. Aplicaciones geométricas

En esta sección vamos a ver algunas aplicaciones geométricas de la integral definida: volúmenes de revolución y longitud de curva. En la relación de ejercicios se presentarán algunas más.

Cálculo de volúmenes por secciones. Supongamos que tenemos el sólido acotado por dos planos perpendiculares al eje OX, $X = a$, $X = b$. Supongamos que para cada $x \in [a, b]$ conocemos el área, $A(x)$, de la sección del sólido por el plano $X = x$ y que la función A así definida es continua en $[a, b]$. Si tomamos una partición del intervalo, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, el volumen del sólido se puede aproximar por la suma de los volúmenes de los cilindros de base $A(x_i)$ y altura $(x_i - x_{i-1})$:

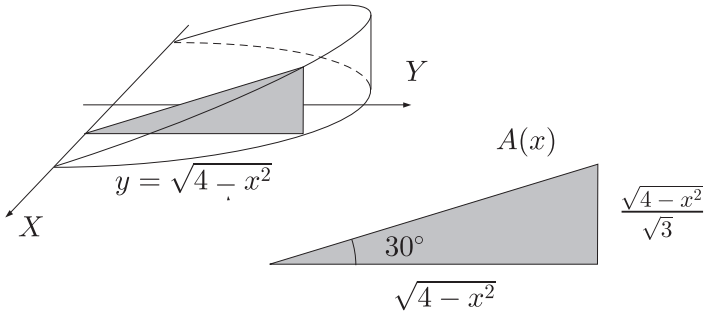
$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

Obviamente, estas expresiones son Sumas de Riemann asociadas a la función $A(x)$, y por lo tanto, podemos afirmar que el volumen exacto es:

$$V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x$$

En algunos casos, el enunciado del problema dará la posición del sólido respecto de los ejes coordenados, pero más frecuentemente, tendremos que elegir nosotros esta posición, de tal forma que sea fácil calcular las áreas $A(x)$.

Ejemplo 6.1.6 Se corta una cuña de un tronco (cilíndrico) de radio 2 dm dando dos cortes con una sierra mecánica que llegan hasta el centro del tronco. Si uno de los cortes se hace perpendicular y el otro formando un ángulo de 30° con el primero, ¿qué volumen tendrá la cuña?



Para hacer el cálculo utilizando el método de las secciones, situamos el sólido como se muestra en la figura. La base de la cuña, perpendicular al eje del tronco, es el interior del semicírculo $y = \sqrt{4 - x^2}$. Al hacer los cortes perpendiculares al eje OX, las secciones son triángulos rectángulos cuya base es $\sqrt{4 - x^2}$ y forma un ángulo de 30° con la hipotenusa. Por lo tanto, su altura es $\sqrt{3}(4 - x^2)$ y el área de la sección es $A(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(4 - x^2)$. El volumen que queríamos calcular es:

$$V = \int_{-2}^{2} A = \int_{-2}^{2} \frac{4 - x^2}{2\sqrt{3}} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{6} \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{2} = \frac{16}{9}\sqrt{3} \qquad \text{——}$$

Como caso particular, podemos calcular el volumen de *sólidos de revolución* usando el método de los discos. Si consideremos una región plana determinada por el grafo de una función continua f entre a y b que gira alrededor del eje OX, el sólido generado verifica que las seccióones perpendiculares al eje OX, son circulos de radio $f(x)$. Por tanto, el volumen del sólido es:

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 \, \mathrm{d}x$$

Cálculo de volúmenes de revolución por capas. Otra forma de generar un sólido de revolución es girando la región determinada por una función continua en un intervalo $[a, b]$ con $a \geq 0$, alrededor del eje OY. Para aproximar el valor de este volumen, consideremos una partición $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, y los puntos intermedios $x_i^* = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$; el volumen del sólido se puede aproximar por la suma de los volúmenes de los cilindros cuya base es la corona

circular de radios x_{i-1} y x_i y cuya altura es $f(x_i^*)$:

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(\pi x_i^2 - \pi x_{i-1}^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \pi f(x_i^*)(x_i + x_{i-i})(x_i - x_{i-i}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i^*) x_i^* (x_i - x_{i-i}) \end{aligned}$$

Obviamente, estas expresiones son Sumas de Riemann asociadas a la función $2\pi x f(x)$, que es continua por serlo f; por lo tanto, podemos afirmar que el volumen exacto es:

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,\mathrm{d}x$$

El método de las secciones es adecuado para sólidos que no presentan *perforaciones*, en estos casos será más recomendable utilizar el método de las capas. Para calcular un volumen utilizando cualquiera de los dos métodos, tendremos que situar los ejes de coordenadas de tal forma que el cálculo de las secciones o de las capas sea lo más simple posible.

Otras aplicaciones geométricas. Siguiendo la técnica mostrada en los ejemplos anteriores, se pueden calcular muchas otras magnitudes: aquellas que se puedan aproximar mediante sumas de Riemannn de una función continua. Mostramos a continuación otras aplicaciones de la integral.

- *Longitud de una curva parametrizada.* Si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ es una curva parametrizada diferenciable y con derivada continua en $[a, b]$, su longitud viene dada por la siguiente integral:

  $$\ell = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

  La expresión del integrando se denomina *diferencial de longitud*

  $$\mathrm{d}\ell = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

  y expresa cómo varía la longitud de la curva respecto de la variación del parámetro.

- Como caso particular del anterior, la *longitud de la gráfica de una función* derivable f, en un intervalo $[a, b]$ es:

  $$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

- *Integral de un campo escalar sobre una línea.* Si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ es una curva parametrizada diferenciable y con derivada continua en $[a, b]$ y $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es un campo escalar continuo, definimos la *integral de f sobre γ* como:

$$\int_C f = \int_a^b f(\gamma(t))\mathrm{d}\ell = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

  Esta integral tiene diversas aplicaciones tanto en geometría como en la física. Por ejemplo, es el área lateral de un cilindro cuya base es la curva C y la altura en cada punto está determinada por f. También representa la masa total de un alambre cuya forma está determinada por la curva C y cuya densidad puntual está determinada por f. En el punto siguiente, la usamos para calcular el área de una superficie de revolución.

- *Área de una superficie de revolución.* Si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ es una curva parametrizada diferenciable y con derivada continua en $[a, b]$, r es una recta y $f(t)$ es la distancia del punto $\gamma(t)$ a la recta r, entonces el área de la superficie generada al girar la curva alrededor de r es:

$$A = \int_C 2\pi f = \int_a^b 2\pi f(t)\mathrm{d}\ell = \int_a^b 2\pi f(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

6.1.3. Integrales impropias

En general, decimos que una integral definida es impropia si la función del integrando no está definida en algún punto del dominio de integración o éste no es acotado. Para abordar este tipo de integrales tenemos que fijarnos en primer lugar en los casos más simples, es decir, aquellos en los que la función no está definida exactamente en un punto.

Definición 6.1.11 *Sea f una función continua en $[a, +\infty)$. La integral impropia $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ se define como*

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$$

Decimos que la integral converge *si este límite existe y es un número real. De forma análoga se define $\displaystyle\int_{-\infty}^a f$*

Definición 6.1.12 *Sea f una función continua en $[a, b)$ y no definida en b. La integral impropia $\displaystyle\int_a^b f$ se define por*

$$\int_a^b f = \lim_{x\to b} \int_a^x f$$

Decimos que la integral converge *si este límite existe y es un número real. De forma análoga se define* $\int_a^b f$ *si* f *es continua en* $(a, b]$ *y no definida en* a.

La regla de Barrow se extiende fácilmente a la evaluación de integrales impropias. Por ejemplo, si F es una primitiva de f en el intervalo $[a, +\infty)$, entonces:

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} (F(x) - F(a)) \underset{\text{(Notación)}}{=} \Big[F(x)\Big]_a^{+\infty}$$

Ejemplo 6.1.7
Vamos a calcular dos integrales impropias de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty} (-\frac{1}{x} + 1) = 1$$
$$\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_0^{1} = \lim_{x\to 0^+} (-1 + \frac{1}{x}) = +\infty$$ ——

Teorema 6.1.13 *Si* f *es una función continua y no negativa, entonces cada uno de los tipos básicos de integrales impropias o bien convergen a un número real* c *o bien divergen a* ∞.

Las definiciones anteriores solo recogen los casos en que la integral es impropia en uno de los límites de integración, pero también podemos considerar *integrales impropias en los dos límites de integración o en un punto interior*. En estos casos, la definición de convergencia se apoya en la propiedad de aditividad, que permite reducir su estudio a los casos básicos. Por ejemplo, si f es continua en $(a, +\infty)$ y no esta definida en a, decimos que la integral impropia $\int_a^{\infty} f$ converge si para algún $b > a$, las integrales impropias $\int_a^b f$ y $\int_b^{\infty} f$ son básicas y convergen; en tal caso

$$\int_a^{\infty} f = \int_a^b f + \int_b^{\infty} f$$

Análogamente se define la convergencia del resto de integrales impropias.

Ejemplo 6.1.8 La integral $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ es impropia en los dos límites de integración; elegimos el punto 1 dentro de su dominio para escribir:

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

En el ejemplo 6.1.7, hemos estudiado la convergencia de los dos sumandos y hemos visto que el primero no es convergente. Por lo tanto, la integral en el intervalo $(0, +\infty)$ no es convergente. ——

6.1.4. Series de Fourier

Si a_n y b_n son dos sucesiones numéricas, la siguiente serie funcional se denomina *serie trigonométrica*:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

Es evidente que las funciones definidas por esta series son periódicas. Más complicado es determinar en qué condiciones estas funciones son continuas o derivables. Por ejemplo, sabemos que si las series asociadas a a_n y b_n son absolutamente convergentes, la serie trigonométrica determina una función continua y derivable.

Así como las series de Taylor permiten aproximar cualquier función mediante polinomios, queremos que las series trigonométricas nos ayuden a aproximar funciones periódicas mediante combinaciones lineales de funciones del tipo $\operatorname{sen} nx$ y $\cos nx$.

Supongamos que las propiedades de la función

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

permiten permutar los operados de integración y de serie; entonces, el siguiente desarrollo sería válido:

$$f(x)\cos mx = \frac{a_0}{2}\cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos mx + b_n \operatorname{sen} nx \cos mx)$$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos mx\,\mathrm{d}x + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,\mathrm{d}x + \\ + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx\,\mathrm{d}x\Big) = a_m\pi\end{aligned}$$

Es decir, podemos expresar el valor de cada coeficiente a_m a partir de una integral calculada sobre f. Repitiendo el mismo proceso multiplicando f por $\operatorname{sen} mx$, conseguimos expresar todos los coeficientes b_m en función de f:

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\ a_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,\mathrm{d}x \\ b_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} mx\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Debe quedar claro que la el paso en el que permutamos la integral con la serie no es en general válido. Como vimos anteriormente en el curso, sí lo

podemos hacer en las series de potencias y lo podremos hacer en algunas series trigonométricas, pero no es válido para cualquier serie de función. El estudio de las condiciones que debe verificar una serie general para que tales transformaciones sean posibles, queda fuera de los objetivos de este curso.

En cualquier caso, el desarrollo anterior justifica la definición que vemos a continuación; si existiera una serie trigonométrica que represente una función f, sus coeficientes deberían de verificar las igualdades obtenidas arriba.

DEFINICIÓN 6.1.14 *Sea f una función periódica de periodo 2π e integrable y consideremos las sucesiones a_n y b_n definidas por*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad n \geq 1$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,\mathrm{d}x, \quad n \geq 1$$

Llamamos serie de Fourier asociada a f *a la serie trigonométrica*

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

y escribimos $f(x) \sim S(x)$.

EJEMPLO 6.1.9 Vamos a determinar la serie de Fourier asociada a la función periódica de periodo 2π tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\pi, -\pi/2) \\ 1 & \text{si } x \in [-\pi/2, \pi/2) \\ 0 & \text{si } x \in [\pi/2, \pi) \end{cases}$$

Hallamos los coeficientes como sigue:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{\pi}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 1$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos nx\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n\pi}\operatorname{sen} nx\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\operatorname{sen} nx\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{n\pi}\cos nx\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$$

Podemos simplificar los coeficientes a_n teniendo en cuenta que, si $n = 2k$, entonces $\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2} = \operatorname{sen} k\pi = 0$ y si $n = 2k+1$, entonces $\operatorname{sen}\dfrac{(2k+1)\pi}{2} = (-1)^k$. Por lo tanto, la serie de Fouries es:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2}{2k+1}\cos(2k+1)x$$ ——

Notación compleja. Una representación alternativa para las series de Fourier, y en muchas ocasiones más sencilla de manejar, es la que se obtiene al utilizar la definición de las funciones trigonométricas utilizando la exponencial compleja:

$$\begin{aligned}
S(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \\
&= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n(\mathrm{e}^{inx} + \mathrm{e}^{-inx}) - ib_n(\mathrm{e}^{inx} - \mathrm{e}^{-inx})) \\
&= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}((a_n - ib_n)\mathrm{e}^{inx} + (a_n + ib_n)\mathrm{e}^{-inx}) \\
&\quad \left[\begin{array}{l} \text{Definimos:} \\ c_0 = \frac{1}{2}a_0, c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \end{array}\right. \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n\mathrm{e}^{inx} + c_{-n}\mathrm{e}^{-inx}) \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n\mathrm{e}^{inx} + c_{-n}\mathrm{e}^{-inx}) \\
&\quad \Big[\text{Extendiendo la notación } \textstyle\sum\text{:} \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{inx} + \sum_{n=-1}^{-\infty}c_n\mathrm{e}^{inx} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{inx}
\end{aligned}$$

Los coeficientes c_n introducidos pueden describirse más facilmente como sigue:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x \\
c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\operatorname{sen} nx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-inx}\mathrm{d}x \\
c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i\operatorname{sen} nx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{inx}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Es decir, la serie de Fourier de la función f es:

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{inx}$$

en donde:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-inx}\mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

6.1.4.1. Simplificación del cálculo

Las posibles propiedades de simetría de la función f facilitan el cálculo de los coeficientes, como en los casos que recoge el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 6.1.15 *Sea f una función periódica de periodo 2π.*

1. *Si f es una función par, es decir, $f(-x) = f(x)$ para todo x, entonces*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

en donde: $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$

2. *Si f es impar, es decir, $f(-x) = -f(x)$ para todo x, entonces,*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$$

en donde: $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,\mathrm{d}x$

También será útil tener en cuenta que el intervalo de integración $[-\pi, \pi]$, utilizado en la definición de los coeficientes, puede ser sustituido por cualquier otro de amplitud 2π gracias al siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 6.1.16 *Si H es una función periódica de periodo 2π, entonces para cada $a \in \mathbb{R}$*

$$\int_a^{a+2\pi} H(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} H(x)\mathrm{d}x$$

En particular, es frecuente utilizar indistintamente los intervalos $[-\pi, \pi]$ y $[0, 2\pi]$ eligiendo el que conduzca a integrales más simples.

6.1.4.2. Propiedades

Tal y como hemos advertido antes, la igualdad entre la función y su serie de Fourier no es válida en general, aunque sí se verifica en determinadas condiciones, según establece el teorema de Dirichlet que vemos a continuación. Antes de ver este resultado recordamos algunos conceptos y notaciones.

- $f(a^+)$ denota el límite por la derecha de f en a si este existe: $f(a^+) = \lim_{x\to a^+} f(x)$.
- $f(a^-)$ denota el límite por la izquierda de f en a si este existe: $f(a^-) = \lim_{x\to a^-} f(x)$.
- $f'(a^+)$ denota la derivada por la derecha de f en a si esta existe: $f'(a^+) = \lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a^+)}{x-a}$.
- $f'(a^-)$ denota la derivada por la izquierda de f en a si esta existe $f'(a^-) = \lim_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a^-)}{x-a}$.
- Una función f definida en el intervalo $[a,b]$ se dice que es *derivable a trozos* si existe una partición $\{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ del intervalo, de tal forma que la función es derivable en cada subintervalo (x_i, x_{1+1}) y existen las derivadas laterales en cada x_i.

TEOREMA 6.1.17 (DE DIRICHLET) *Sea f una función periódica de periodo 2π y derivable a trozos en el intervalo $[-\pi,\pi)$; consideremos la serie de Fourier asociada a f, S. Entonces, se verifica que para cada $x \in \mathbb{R}$,*

$$S(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)];$$

en particular, si f es continua en x, $S(x) = f(x)$.

Es decir, en los intervalos de continuidad la serie coincide con la función y en los puntos de discontinuidad, la serie converge al punto intermedio entre los límites laterales. Para el ejemplo 6.1.9, lo vemos gráficamente en la figura 6.1

También hemos advertido varias veces que el operador serie no permuta, en general, con los de derivación e integración. Para las series trigonométricas, en determinadas condiciones sí podremos hacerlo.

TEOREMA 6.1.18 *Sea f una función periódica de periodo 2π, derivable en $[-\pi,\pi]$ y verificando:*

1. *$f(-\pi^+) = f(\pi^-)$;*
2. *f' es derivable a trozos en $[-\pi,\pi]$;*
3. *$f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$.*

Entonces,

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n(-a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx)$$

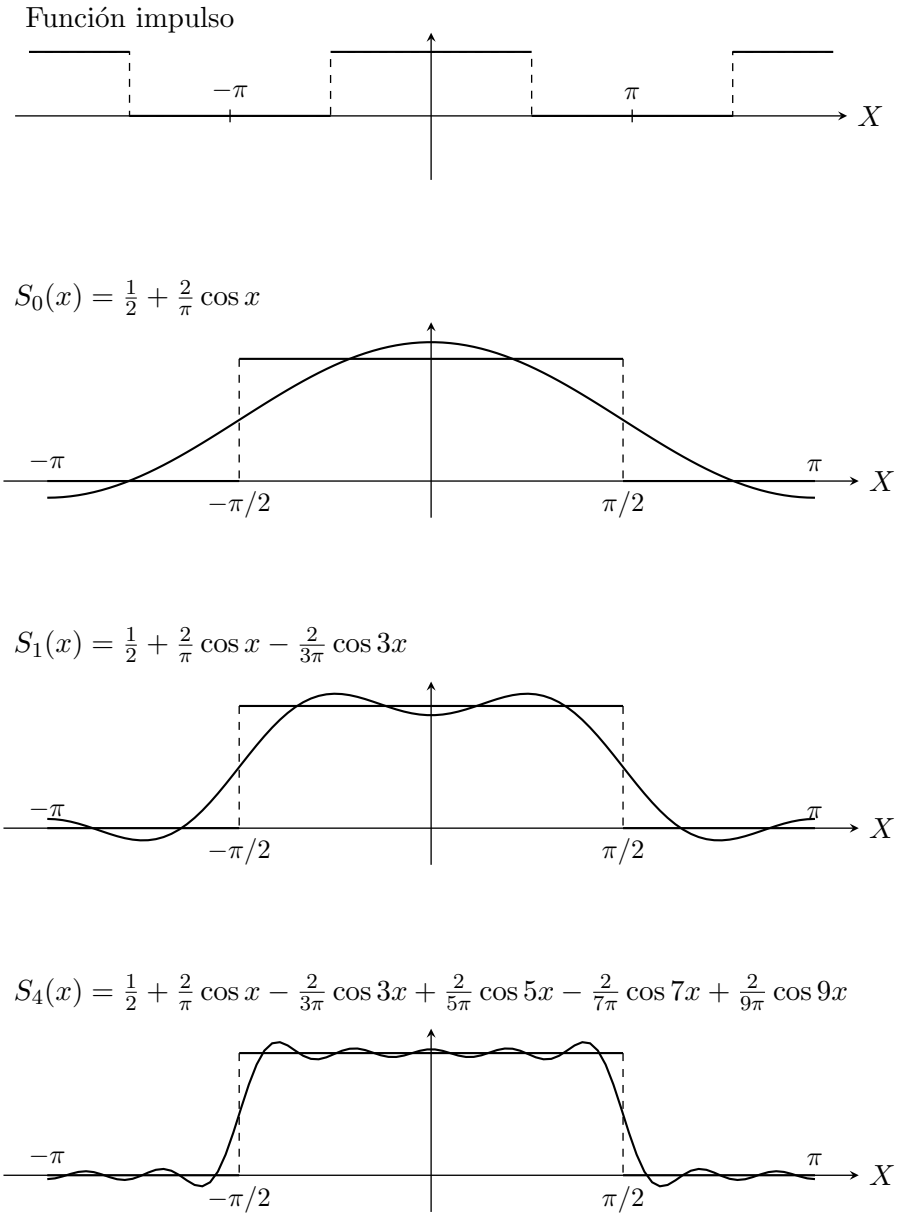


Figura 6.1: Función impulso, definida en el ejemplo 6.1.9, y varias sumas parciales de su serie de Fourier.

Si una serie de Fourier tiene termino independiente, su integral, término a término no es una serie trigonométrica. Por lo tanto, no sería cierto afirmar que "la integral de la serie de Fourier es la serie de Fourier de la integral". Sin embargo, sí podremos realizar este operación para generar nuevas series de Fourier. Antes de ver el correspondiente resultado, vamos a observar que, aunque en general la primitiva

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

de una función periódica f, no tiene que ser periódica, la siguiente función sí lo es:

$$g(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \frac{a_0}{2}x$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{x+2\pi} f(t)\mathrm{d}t - \frac{a_0}{2}(x+2\pi) \\
&\quad = \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t + \int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t)\mathrm{d}t - \frac{a_0}{2}x - a_0\pi \\
&\quad = a_0\pi + \int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t)\mathrm{d}t - \frac{a_0}{2}x - a_0\pi \\
&\quad = \int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t)\mathrm{d}t - \frac{a_0}{2}x = \int_0^x f(t+2\pi)\mathrm{d}t - \frac{a_0}{2}x = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \frac{a_0}{2}x
\end{aligned}$$

De hecho, el teorema de integración de series de Fourier que vemos a continuación nos dice si integramos término a término la serie de Fourier de f, obtenemos la serie de Fourier de g.

Teorema 6.1.19 *Sea f una función periódica de periodo 2π y derivable a trozos en $[-\pi,\pi]$ con el siguiente desarrollo en serie de Fourier:*

$$\frac{1}{2}[f(t^+) + f(t^-)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n \operatorname{sen} nt)$$

Entonces, para cada x se verifica que

$$g(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \frac{a_0}{2}x = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\operatorname{sen} nx - \frac{b_n}{n}\cos nx\right),$$

en donde, $A_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\mathrm{d}x$.

Naturalmente, la función g puede expresarse con cualquier primitiva de f; el coeficiente A_0 dependerá de la primitiva elegida, pero en cualquier caso los resultados solo diferirán en una constante.

Ejemplo 6.1.10 Vamos a aplicar el resultado anterior a la serie del ejemplo 6.1.9. Dado que ya hemos demostrado que la función $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \frac{a_0}{2}x$ es periódica de periodo 2π, solo necesitamos calcularla explícitamente en el intervalo $[-\pi,\pi]$:

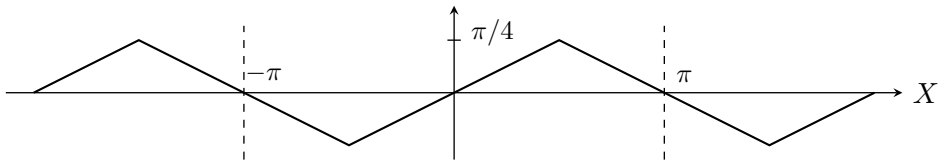


Figura 6.2: Función g del ejemplo 6.1.10.

- Si $x \in [-\pi, -\pi/2]$: $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{-\pi} \mathrm{d}t = \Big[t\Big]_{-\pi/2}^{-\pi} = -\dfrac{\pi}{2}$.
- Si $x \in [-\pi/2, \pi/2]$: $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{d}t = \Big[t\Big]_0^x = x$.
- Si $x \in [\pi/2, \pi]$: $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{\pi} \mathrm{d}t = \Big[t\Big]_{\pi/2}^{\pi} = \dfrac{\pi}{2}$.

Por lo tanto, la función $g(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \frac{x}{2}$ coincide con

$$g(x) = \begin{cases} \frac{-\pi - x}{2} & \text{si } x \in [-\pi, -\pi/2) \\ \frac{x}{2} & \text{si } x \in [-\pi/2, \pi/2) \\ \frac{\pi - x}{2} & \text{si } x \in [\pi/2, -\pi) \end{cases}$$

En la figura 6.2, podemos ver la gráfica de la función g, y tal y como establece el teorema anterior, observamos que es continua en $\mathbb{R}$. Su coeficiente A_0 lo tenemos que calcular explícitamente, sin embargo, por la simetría impar de g podemos afirmar que dicho coeficiente es nulo, sin necesidad de hacer el cálculo. Finalmente, integramos la serie de f para obtener la de g según establece el teorema:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{(2k+1)^2} \operatorname{sen}(2k+1)x \qquad \text{——}$$

Ejemplo 6.1.11 Podemos utilizar las series de Fourier para sumar series numéricas. Vamos a obtener la suma de la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ usando el desarrollo del ejemplo anterior. Si tomamos $x = \pi/2$, tenemos que

$$\frac{\pi}{4} = g(\pi/2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{(2k+1)^2} \operatorname{sen} \frac{\pi(2k+1)}{2} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{(2k+1)^2} (-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)^2}$$

Por lo tanto, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{8}$. ——

6.1.4.3. Extensiones periódicas de funciones

En muchas ocasiones estaremos interesados en el desarrollo en serie trigonométrica de funciones definidas en un dominio restringido. La forma de hacerlo será extender el dominio de forma periódica y utilizar los métodos anteriores para encontrar el desarrollo buscado. Haremos este estudio para el dominio restringido $[-\pi, \pi]$, la extensión a un dominio más general es inmediata teniendo en cuenta la sección anterior.

Consideremos una función f arbitraria; se pueden presentar dos situaciones:

1. El dominio que nos interesa es $[-\pi, \pi]$ (o cualquier otro intervalo de amplitud 2π); en este caso, desarrollamos la función g definida como extensión periódica de f.
2. Solo nos interesa el dominio $[0, \pi]$. En este caso tenemos dos posibilidades, las dadas al considerar las funciones f_1 y f_2 definidas como extensión periódica de:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, \pi] \\ f(-x) & \text{si } x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, \pi] \\ -f(-x) & \text{si } x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

que coinciden con f en $[0, \pi]$. La función f_1 es par y por tanto su serie de Fourier es una *serie de cosenos*; la función f_2 es impar y por lo tanto su serie de Fourier es una *serie de senos*. Considerando una u otra función como extensión de f tenemos las siguientes series de Fourier asociadas a f:

Serie de cosenos. Si f está definida en $[0, \pi]$, su serie de cosenos es

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad x \in [0, \pi]$$

en donde: $a_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x$

Serie de senos. Si f está definida en $[0, \pi]$, su serie de senos es

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx, \quad x \in [0, \pi].$$

en donde $b_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, \mathrm{d}x$.

6.1.4.4. Funciones de periodo arbitrario

Es posible definir la serie de Fourier asociada a cualquier función periódica aunque el periodo sea distinto de 2π. Tal definición se hace a partir de la dada en la sección anterior y mediante una simple cambio de variable.

Si $f(x)$ es periódica de periodo $2T$, entonces $g(t) = f(\frac{T}{\pi}t)$ es periódica de periodo 2π; a esta función le podemos hallar su serie de Fourier, $g(t) \sim S(t)$; una vez hecho esto, y teniendo en cuenta que $f(x) = g(\frac{\pi}{T}x)$, obtenemos la serie de Fourier de f, $f(x) \sim S(\frac{\pi}{T}x)$. Los resultados obtenidos nos llevan a la serie

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi}{T}x + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{T}x),$$

en donde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x \\ a_n &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi}{T}x\,\mathrm{d}x \\ b_n &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{T}x\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Utilizando la notación con la exponencial compleja, si f es una función de periodo $2T$, su serie de Fourier es:

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{in\pi x/T}$$

en donde:

$$c_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\mathrm{e}^{-in\pi x/T}\mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

De la misma forma que para las funciones de periodo 2π, en las funciones de periodo $2T$ podemos utilizar cualquier intervalo con esta amplitud, en las integrales que definen los coeficientes de Fourier.

Ejercicios básicos

1. Consideramos la región del primer cuadrante encerrada entre la gráfica de la función $f(x) = 1 - x$ y los ejes de coordenadas.

   a) Utilizando las definiciones de la página 274, calcule valores aproximados del área de la región utilizando *sumas superiores* y *sumas inferiores* asociadas a particiones de 2, 3 y 5 puntos. Compare y analice los resultados.

   b) Calcule el valor exacto del área de dos maneras distintas con el límite sobre la suma de Riemannn para una elección cualquiera sobre la partición $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\}$.
   (Indicación: recuerde que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$)

   c) Compare los resultados aproximados obtenidos en el primer apartado con el valor exacto obtenido en el segundo apartado y compruebe que se verifica la desigualdad $L_P \leq A \leq U_P$.

2. Utilice la regla de Barrow para calcular

$$\int_0^{\pi^2/4} \operatorname{sen} \sqrt{x}\, \mathrm{d}x,$$

   teniendo en cuenta que, si se utilizan cambios de variable o integración por partes, deben aplicarse los resultados 6.1.8, 6.1.9 ó 6.1.10.

3. Interprete gráficamente el teorema 6.1.4. Aplíquelo para calcular el área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^4 - 9x^2 + 10$ y $g(x) = x^2 + 1$.

4. Determine la función $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$, $x \in [0, 4]$, en donde:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 8 - 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

   Compruebe que se verifica la conclusión dada por el teorema fundamental del cálculo (teorema 6.1.5).

5. Consideremos la región comprendida entre la curva $y = x^2$ y la recta $y = x + 2$. Dibuje la región y utilice los modelos de la sección 6.1.2 para calcular los siguientes volúmenes.

   a) Volumen de revolución que se genera al girar la región alrededor del eje $X = 2$.

b) Volumen de revolución que se genera al girar la región alrededor del eje $Y = -1$.

6. Halle la distancia recorrida por un móvil entre los instantes $t = 0$ y $t = 4$ si su posición viene determinada por las ecuaciones:

$$x(t) = \frac{t^2}{2}, \qquad y(t) = \frac{1}{3}(2t+1)^{3/2}$$

7. Determine si las siguientes integrales impropias (sección 6.1.3) son básicas o no, estudie su convergencia y, en su caso, calcule su valor:

$$\text{(a)} \quad \int_{\mathrm{e}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \log x} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \int_{0}^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x \log x}$$

8. Halle la serie de Fourier de la función f, periódica de periodo 2π y tal que $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{en } (-\pi, 0] \\ x & \text{en } (0, \pi] \end{cases}$.

   Utilice esta serie para calcular la suma de la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

9. *a*) Justifique la igualdad: $x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}, \quad x \in [-\pi, \pi]$.

   b) Deduzca que: $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \operatorname{sen} nx, \quad x \in [-\pi, \pi]$.

   c) Deduzca que: $x(x^2 - \pi^2) = 12\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{sen} nx}{n^3}, \quad x \in [-\pi, \pi]$

   d) Calcule las sumas de las series: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

10. Lea la sección 6.1.4.3 y aplique su contenido para desarrollar en serie de cosenos la función $\operatorname{sen} x$ para $x \in [0, \pi]$.

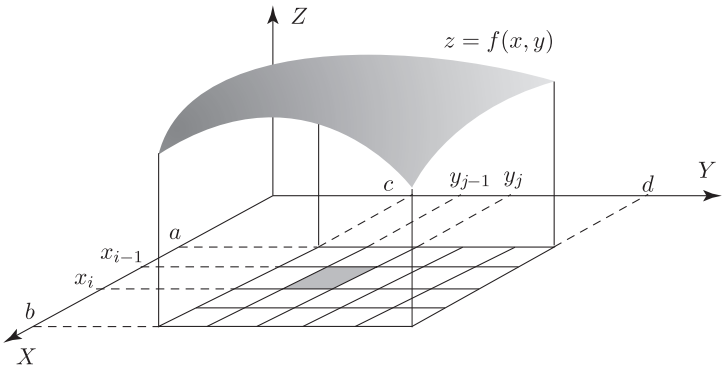
11. Lea la sección 6.1.4.4 y aplique su contenido para obtener la serie de Fourier la función de periodo 3 definida en $[-1, 2)$ por $f(x) = E[x]$.

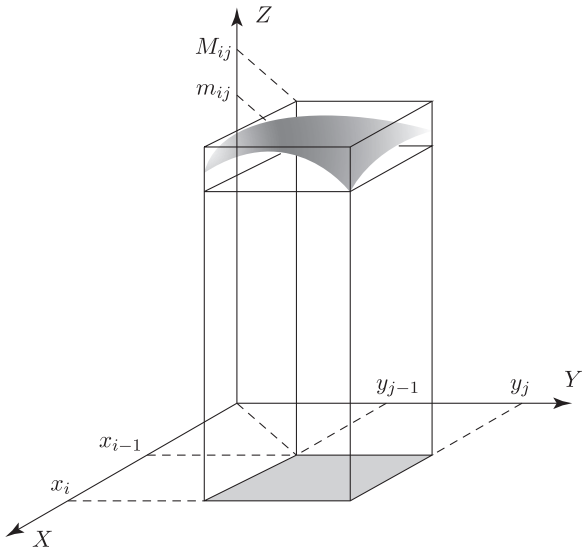
12. Exprese como suma de funciones racionales simples la sucesión racional $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{(n+1)^2}$. Entre las series que ha aprendido a sumar en esta lección y en el tema 2 encontrará aquellas que le permiten evualuar $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

LECCIÓN 6.2

Integración múltiple

Consideremos un campo escalar $f\colon R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y supongamos que f es positiva y acotada en el *rectángulo* $R = [a, b] \times [c, \mathrm{d}]$. De la misma forma que para las funciones de una variable utilizábamos rectángulos, ahora podemos intentar aproximar el volumen de la región que queda entre el grafo de f y el plano XY tomando prismas. La manera más simple de hacerlo es tomando particiones de los intervalos $[a, b]$ y $[c, \mathrm{d}]$ y considerando como base de los prismas los rectángulos que forman:





Las aproximaciones por defecto y por exceso se calculan de forma similar a como hemos hecho en una variable. Basta tomar los valores menor y mayor que toma la función en cada rectángulo. Una *aproximación por defecto* del

volumen será la *suma inferior* de f

$$L_P = \sum_{i,j} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Una *aproximación por exceso* del volumen será la *suma superior* de f:

$$U_P = \sum_{i,j} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Para mejorar estas aproximaciones basta tomar particiones *más finas* de los intervalos.

Definición 6.2.1 *Sea $f\colon R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar acotado en el rectángulo $R = [a,b] \times [c,\mathrm{d}]$. Decimos que f es integrable en R si $\inf_P\{U_P\} = \sup_P\{L_P\}$. En tal caso, a este número lo llamamos* integral de f en R *y lo denotamos:*

$$\iint_R f = \inf\{U_P\} = \sup\{L_P\}$$

Teorema 6.2.2 *Si un campo es continuo en en un rectángulo, también es integrable*

Para los campos integrables, es posible utilizar *sumas de Riemannn* para calcular las integrales, es decir, podemos considerar cualquier punto de cada intervalo de la partición en lugar del máximo o el mínimo. También para campos integrables, podemos considerar sucesiones de particiones en lugar de todas las posibles sucesiones, siempre y cuando la distancia entre los puntos de la partición decrezca a 0.

Ejemplo 6.2.1 Consideremos el campo $f(x,y) = 2x + y$ definido en la región $[0,1] \times [0,1]$; este campo es integrable por ser continuo. Para cada m consideremos la partición, P_m, determinada por la siguiente partición del intervalo $[0,1]$: $\{0, {}^1\!/_m, {}^2\!/_m, \ldots, {}^m\!/_m = 1\}$; y consideremos la elección de puntos, ξ_m, dada por el vértice superior derecho de cada rectángulo. La correspondiente sucesión de sumas de Riemannn es:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_m &= \sum_{1\le i,j\le m} \Big(2\frac{i}{m} + \frac{j}{m}\Big)\frac{1}{m^2} = \frac{1}{m^3} \sum_{1\le i,j\le m} (2i + j) \\
&= \frac{1}{m^3}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}(2i + j) = \frac{1}{m^3}\sum_{j=1}^{m}\Big(mj + 2\sum_{i=1}^{m} i\Big) \\
&= \frac{1}{m^3}\sum_{j=1}^{m}\Big(mj + 2\frac{m(m+1)}{2}\Big) = \frac{1}{m^3}\Big(m^2(m+1) + m\sum_{j=1}^{m} j\Big) \\
&= \frac{1}{m^3}\Big(m^2(m+1) + m\frac{m(m+1)}{2}\Big) = \frac{3m^2(m+1)}{2m^3}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\iint_R (2x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{m\to+\infty} \dfrac{3m^2(m+1)}{2m^3} = \dfrac{3}{2}$ ——

El dominio rectangular es una restricción demasiado fuerte, sin embargo, no es necesaria.

TEOREMA 6.2.3 *Sea C un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$ y sea f un campo escalar continuo y acotado en C. Sea R un rectángulo tal que $C \subset R$ y consideremos el campo*

$$\bar{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}) & si\ \boldsymbol{x} \in C \\ 0 & si\ \boldsymbol{x} \in R \setminus C \end{cases}$$

Entonces, el campo $\bar{f}$ es integrable en R.

Este resultado permite extender la definición de integrabilidad a regiones más generales.

DEFINICIÓN 6.2.4 *Siguiendo las notaciones del teorema anterior, llamamos integral de f en C a:*

$$\iint_C f = \iint_R \bar{f}$$

Con el siguiente resultado establecemos que efectivamente la integral permite calcular el volumen de regiones de tres dimensiones.

TEOREMA 6.2.5 *Consideremos un campo escalar $f\colon C \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y supongamos que f es positivo y acotado en C. Entonces, la integral $\iint_C f$ es el valor del volumen del sólido comprendido entre el grafo de f en C y el plano XY.*

No vamos a abordar en este curso las integrales de campos de tres o más variables, aunque teóricamente su definición no supone ninguna dificultad. Como veremos a lo largo del tema, el calculo de las integrales múltiples se sustenta en el cálculo de primitivas y en el estudio y transformación de las regiones de integración y por lo tanto, el nivel de dificultad que aporta el aumento de las variables no está en el propio concepto de integral sino en la manipulación de regiones y objetos en el espacio. Por esta razón, en este curso trabajaremos solamente en regiones planas.

TEOREMA 6.2.6 *Sean f y g dos campos escalares integrables sobre $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^2$ y $c, k \in \mathbb{R}$.*

1. *Linealidad:* $\iint_{\mathrm{D}} (cf+kg) = c\left(\iint_{\mathrm{D}} f\right) + k\left(\iint_{\mathrm{D}} g\right)$

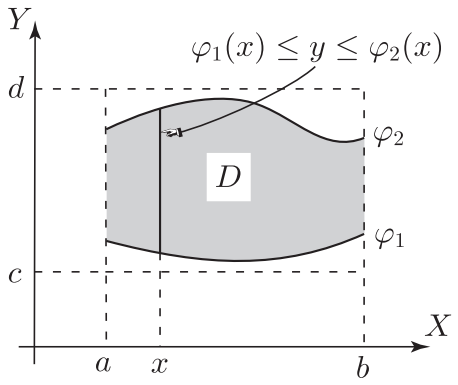


Figura 6.3: Región limitada por dos grafos.

2. Aditividad: Si $\mathrm{D} = \mathrm{D}_1 \cup \mathrm{D}_2$ *y Área*$(\mathrm{D}_1 \cap \mathrm{D}_2) = 0$,

$$\iint_{\mathrm{D}} f = \left(\iint_{\mathrm{D}_1} f \right) + \left(\iint_{\mathrm{D}_2} f \right)$$

6.2.1. Teorema de Fubini. Consecuencias

El teorema de Fubini, que enunciamos a continuación, demuestra que los conceptos de integral sobre cada dimensión son coherentes:

Teorema 6.2.7 (de Fubini) *Sea* $f\colon R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *un campo escalar integrable en el rectángulo* $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. *Entonces:*

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Ejemplo 6.2.2 Calculemos la integral $\iint_R (2x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ con $R = [0,1]\times[0,1]$, que estudiamos en la sección anterior haciendo uso de sumas de Riemannn.

$$\begin{aligned} \iint_R (2x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (2x+y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \left[x^2 + yx \right]_{x=0}^1 \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 (1+y)\mathrm{d}y = \left[y + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Ejemplo 6.2.3 Supongamos que $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^2$ está limitado por los grafos de las funciones $\varphi_1\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ y $\varphi_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tal y como se muestra en la figura 6.3,

entonces, considerando la función $\bar{f}$ definida en el teorema 6.2.3:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_a^b \left(\int_c^{\mathrm{d}} \bar{f}(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \left(\int_c^{\varphi_1(x)} 0\cdot\mathrm{d}y + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_{\varphi_1(x)}^{\mathrm{d}} 0\cdot\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Por ejemplo, podemos calcular el volumen de la cuña descrita en el ejemplo 6.1.6 utilizando una integral doble y la fórmula anterior como sigue. El sólido es la región que queda entre el grafo del campo $f(x,y) = y\sqrt{3}$ y el plano OX en el dominio D definido por $-2 \le x \le 2$, $0 \le y \le \sqrt{4-x^2}$.

$$\begin{aligned}V &= \iint_{\mathrm{D}} \sqrt{3}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{2}\left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{3}y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}y^2\right]_0^{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-2}^{2}(4-x^2)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{16}{3}\sqrt{3}\end{aligned}$$

——

6.2.2. Teorema de cambio de variable

El teorema de Fubini es la herramienta fundamental para el cálculo de integrales múltiples, sin embargo, hemos podido observar que su aplicación no es sencilla si la región de integración no es rectangular. Los cambios de variable nos van a permiter utilizar descripciones más simples de una región. Por ejemplo, mientras que un círculo de radio a centrado en $(0,0)$ en coordenadas cartesians se describe por $-\sqrt{a^2-x^2} \le y \le \sqrt{a^2-x^2}$, $-a \le x \le a$, en coordenadas porlares se describe simplemente por $0 \le r \le a$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

Para hacer esta descripción alternativa, hemos usado la aplicación

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

que convierte las *coordenadas polares* en *coordenadas cartesianas*, según se muestra en la figura 6.4. Esta aplicación tiene su origen e imagen en $\mathbb{R}^2$, es decir, es un *campo vectorial*. Para poder enunciar el teorema de cambio de variable necesitamos introducir algunos conceptos previos.

Definición 6.2.8 *Un campo vectorial es una aplicación cuyo dominio está contenido en un espacio $\mathbb{R}^n$ y su imagen lo está en otro espacio $\mathbb{R}^m$; es decir, responde al esquema $\boldsymbol{f}\colon \mathrm{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Un campo vectorial está determinado por m campos escalares: $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_m)$.*

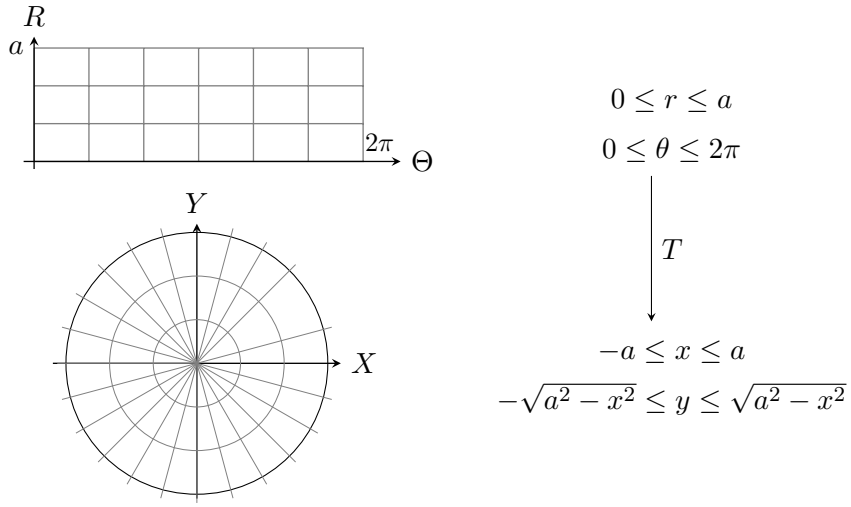


Figura 6.4: Cambio de variable a coordenadas polares.

En el teorema de cambio de variable, utilizaremos campos vectoriales continuos y diferenciables, es decir, sus componentes son campos escalares continuos y diferenciables. La *diferencial* de estos campos se puede estudiar formalmente siguiendo un esquema similar al utilizado para los campos escalares, llegando a la conclusión de que la matriz de esta aplicación lineal se puede expresar a partir de los gradientes de sus componentes según establece la siguiente definición. Los detalles de estas comprobaciones quedan fuera de los objetivos del curso y de las necesidades de este tema.

Definición 6.2.9 *Si* $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ *es diferenciable en* $\boldsymbol{a} \in \mathrm{Dom}(f)$*, llamamos* matriz jacobiana *de* $\boldsymbol{f}$ *en* $\boldsymbol{a}$ *a la matriz:*

$$J\boldsymbol{f}(a) = \begin{pmatrix} \mathrm{D}_1 f_1(\boldsymbol{a}) & \mathrm{D}_2 f_1(\boldsymbol{a}) & \ldots & \mathrm{D}_n f_1(\boldsymbol{a}) \\ \mathrm{D}_1 f_2(\boldsymbol{a}) & \mathrm{D}_2 f_2(\boldsymbol{a}) & \ldots & \mathrm{D}_n f_2(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{D}_1 f_m(\boldsymbol{a}) & \mathrm{D}_2 f_m(\boldsymbol{a}) & \ldots & \mathrm{D}_n f_m(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\boldsymbol{a}) \\ \nabla f_2(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

De esta forma, tenemos los elementos necesarios para enunciar el teorema de cambio de variable.

Teorema 6.2.10 *Sea* $F\colon T(\mathrm{D}) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *un campo escalar continuo, siendo* D *cerrado y acotado. Sea* $T : \mathrm{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *un campo vectorial biyectivo, salvo en un subconjunto de área nula, diferenciable y con las derivadas parciales continuas. Entonces:*

$$\iint_{T(\mathrm{D})} F = \iint_{\mathrm{D}} (F \circ T)|\det(JT)|$$

Mientras que para las integrales de una variable, este teorema se utiliza fundamentalmente para el cálculo de primitivas para simplificar la función a integrar, en la integración múltiple lo utilizaremos fundamentalmente para describir de forma más sencilla la región de integración.

Ejemplo 6.2.4 Hemos mostrado más arriba el cambio a coordenadas polares:

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Veamos como se transforma una integral al aplicar este cambio de variables. En primer lugar, calculamos el jacobiano de T:

$$JT(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el valor absoluto del determinante es: $|\det(JT(r,\theta))| = |r|$; y la fórmula de cambio de variable queda:

$$\iint_{T(\mathrm{D})} F(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathrm{D}} F(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)|r|\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

En la integral de la izquierda, $T(\mathrm{D})$ representa a la región de integración descrita en coordenadas cartesians, mientras que D, en la integral de la derecha, representa a la misma región pero descrita en coordenadas polares. ——

Los campos vectoriales son la herramienta fundamental para expresar los cambios de variables cuando trabajamos con varias simultáneamente y son un modelo fundamental en muchas áreas de la física. En muchas ocasiones, necesitaremos aplicar varios campos de forma sucesiva y por eso es necesario saber trabajar con este tipo de combinaciones y conocer sus propiedades. En particular, necesitaremos conocer todas las propiedades algebraicas de la diferenciabilidad de campos vectoriales, que por otra parte son inmediatas a partir de las correspondientes propiedades de los campos escalares. Enunciamos solamente la *regla de la cadena*, en un resultado que generaliza todos los resultados similares que hemos visto anteriormente.

Teorema 6.2.11 (Regla de la cadena) *Si $\boldsymbol{g}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ son campos vectoriales diferenciables, entonces $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$ es otro campo vectorial diferenciable y $J(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})(\boldsymbol{a}) = J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}))\cdot J\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})$.*

En cada caso, la aplicación de la regla de la cadena da una serie de igualdades que permiten calcular las parciales de $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$ a partir de las parciales de las componentes de $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$. Veamos estas igualdades en un tipo concreto de composición. Si $\boldsymbol{g}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{g} = (g_1,\ldots,g_m)$, $f\circ\boldsymbol{g}$ es un campo

escalar en $\mathbb{R}^n$ y la regla de la cadena da las siguientes ecuaciones: (las damos con las dos notaciones introducidas)

$$\mathrm{D}_k(f\circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{a}) = \mathrm{D}_1 f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}))\mathrm{D}_k g_1(\boldsymbol{a}) + \mathrm{D}_2 f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}))\mathrm{D}_k g_2(\boldsymbol{a}) + \\ + \cdots + \mathrm{D}_m f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}))\mathrm{D}_k g_m(\boldsymbol{a})$$

$$\frac{\partial (f\circ \boldsymbol{g})}{\partial x_k}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}))\frac{\partial g_1}{\partial x_k}(\boldsymbol{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}))\frac{\partial g_2}{\partial x_k}(\boldsymbol{a}) + \\ + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}))\frac{\partial g_m}{\partial x_k}(\boldsymbol{a})$$

6.2.3. Aplicaciones

Tal y como ocurre con las funciones de variable real, las aplicaciones de la integral doble no se reducen al cálculo de volúmenes. Son múltiples las magnitudes físicas, matemáticas y de otras áreas que pueden ser modeladas y calculadas con este tipo de integrales. A modo de ejemplo, mostramos dos aplicaciones geométricas.

Áreas de regiones planas. La integral doble nos da una forma sencilla de representar el área de una región plana arbitraria:

$$\text{Área}(\mathrm{D}) = \iint_{\mathrm{D}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

El uso de las técnicas presentadas en las secciones anteriores nos permitirá abordar el cálculo del área de regiones cuyas representaciones como integrales de una variable sería más compleja.

Áreas de grafos. En la lección anterior hemos podido calcular el área de superficies que se puedan describir como figuras de revolución. Para tratar con superficies más generales, debemos hacer uso de las integrales dobles. Por ejemplo, el área de la superficie del grafo de un campo escalar diferenciable y con parciales continuas en un dominio D es

$$\iint_{\mathrm{D}} \sqrt{1 + (\mathrm{D}_1 f(x,y))^2 + (\mathrm{D}_2 f(x,y))^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

La expresión del integrando se conoce como *diferencial de superficie* y juega un papel similar al de la diferencial de longitud.

Integrales de línea. Una de las aplicaciones fundamentales la integral en la física es el cálculo del trabajo que realiza un campo (vectorial) de fuerzas al desplazarse por una curva. Esta magnitud se modeliza con lo que se conoce como *integral de línea*, que definimos a continuación.

DEFINICIÓN 6.2.12 *Sea $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial y $\gamma(t)$, $t \in [a,b]$, una curva en $\mathbb{R}^2$. Llamamos* integral de línea de $\boldsymbol{F}$ sobre la curva C *o* circulación de $\boldsymbol{F}$ a través de C *a:*

$$\int_C \boldsymbol{F} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (F_1(x(t),y(t))x'(t) + F_2(x(t),y(t))y'(t))\,\mathrm{d}t$$

Si la curva C es cerrada, es decir $\gamma(a) = \gamma(b)$, esta integral se denota: $\oint_C \boldsymbol{F}$.

De forma más abreviada, la integral de línea se suele expresar igualmente como sigue:

$$\int_C \boldsymbol{F} = \int_C F_1(x,y)\mathrm{d}x + F_2(x,y)\mathrm{d}y$$

Las integrales de línea y las integrales dobles están relacionadas por el teorema de Green, que enunciamos a continuación.

TEOREMA 6.2.13 (DE GREEN) *Sea C es una curva regular a trozos, cerrada y simple de $\mathbb{R}^2$ recorrida en el sentido contrario a las agujas del reloj y sea* D *la región interior de esta curva. Entonces:*

$$\int_C \boldsymbol{F} = \iint_{\mathrm{D}} (\mathrm{D}_1 F_2 - \mathrm{D}_2 F_1)$$

Este resultado tiene múltiples aplicaciones, de las cuales destacamos la siguiente.

COROLARIO 6.2.14 *Si C es una curva regular, cerrada y simple, entonces el área de la región encerrada por C es*

$$A = \left| \frac{1}{2} \int_C x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x \right|.$$

El signo del integrando depende del sentido en el que se recorre la curva. El valor absoluto elimina este signo, de forma que no es necesario preocuparse del sentido de recorrido en la parametrización elegida.

Ejercicios básicos

1. Halle la integral doble de los campos indicados:

   a) $f(x,y) = (x+2y)^2$ sobre $R = [-1,2] \times [0,2]$.

   b) $f(x,y) = xy^3 \mathrm{e}^{x^2y^2}$ sobre $R = [1,3] \times [1,2]$.

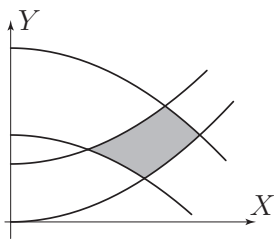
2. Dibuje la región sobre la que se integra, intercambie el orden de integración y evalúe la integral

$$\int_0^1 \int_x^1 xy \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x.$$

3. Utilice el cambio de variable a coordenadas polares para hallar el área encerrada por la cardioide de ecuación $\rho = a(1+\cos\theta)$.

4. Exprese la curva $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$, $x \geq 0$, utilizando coordenadas polares y dibújela. Exprese la integral $\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ utilizando coordenadas polares.

5. Consideramos la región, $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^2$ delimitada por las parábolas



$$\begin{aligned} y = x^2 + 4 \quad &, \quad y = x^2, \\ y = 6 - x^2 \quad &, \quad y = 12 - x^2 \end{aligned}$$

   a) Defina una biyección $T\colon [6,12] \times [0,4] \to \mathrm{D}$.

   b) Utilice el cambio T para calcular la integral $\iint_{\mathrm{D}} xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

6. Consideremos la región R limitada por la curva $x(t) = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y(t) = a(1-\cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, y el eje OX. Mediante un parámetro $s \in [0,1]$ parametrice cada segmento que une los puntos $(x(t),0)$ y $(x(t),y(t))$. Con las variables t y s defina un cambio de variable que transforme la región de integración en un rectángulo. Calcule $\iint_R y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

7. A partir del cambio de variable a coordenadas polares describa un cambio de variable adecuado para calcular el área encerrada por la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

8. Calcule la superficie del paraboloide $z = x^2 + y^2$ sobre el círculo $\mathrm{D} = \{(x,y)^2 \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

9. Halle $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ si $w = uv + \log v$, $u = x + y^2$, $v = \mathrm{e}^x \cos y$, expresando la respuesta respecto de u y v.

10. Calcule la integral de línea $\displaystyle\int_C xy^4\,\mathrm{d}x + x^2y^3\,\mathrm{d}y$, en donde C es una curva que une los puntos $O = (0,0)$ y $A = (1,1)$ y verifica $y^3 = x^2$.

11. Utilice el *teorema de Green* (página 305) para calcular la integral

$$\oint_C y^3\mathrm{d}x + (x^3 + 3xy^2)\mathrm{d}y$$

en donde C es la curva que va del punto $(1,1)$ al punto $(0,0)$ siguiendo la recta $Y = X$ y vuelve al punto $(1,1)$ siguiendo la curva $Y = X^3$.

Relación de ejercicios (I)

1. Consideremos la región del primer cuadrante encerrada entre la gráfica de la función $f(x) = 1 - x^2$ y el eje OX. Se pide:

   a) Calcule valores aproximados del área de la región utilizando sumas superiores e inferiores tomando particiones de 2, 3, 5 y 9 puntos.

   b) Calcule el valor exacto del área de dos maneras distintas tomando límite sobre una sucesión sumas de Riemannn regulares.

   c) Compare los resultados aproximados y el valor exacto y compruebe que se verifica la desigualdad: $L_P \leq A \leq U_P$.

2. Consideremos las siguientes funciones definidas en el intervalo $[0, 10]$:

$$f(x) = x^2 - 3x, \qquad g(x) = \begin{cases} 10 & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2x - 4 & \text{si } 4 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

   a) Calcule las integrales $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$ e $\displaystyle\int_0^{10} g(x)\,\mathrm{d}x$

   b) Indique las propiedades de la integral definida que se van aplicando para calcular la integral

$$\int_0^{10} (2f(x) - 3g(x))\,\mathrm{d}x$$

3. Aplique el teorema de cambio de variable adecuado para calcular la integral

$$\int_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$

4. Utilice la integral definida para calcular el área de las siguientes regiones:

   a) La región determinada por la curva de ecuación $f(x) = \sqrt{2x+1}$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

   b) La región limitada por la parábola de ecuación $y = -x^2 + 3x + 10$ y el eje de abscisas.

5. Usar las propiedades de la integral definida y el teorema fundamental para Halle las siguientes derivadas:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \mathrm{e}^t \mathrm{d}t, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^{x^3} t^5 \mathrm{d}t, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{x^2} \operatorname{sen} t\,\mathrm{d}t$$

6. Utilice el método de secciones para calcular el volumen de una pirámide cuadrangular cuya altura es h y el lado de la base vale ℓ.

7. Consideremos la región comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x$. Se pide:

   a) Calcular el volumen de revolución que se genera al girar la región alrededor del eje OX.

   b) Calcular el volumen de revolución que se genera al girar la región alrededor del eje OY.

8. Un cable eléctrico soportado por dos postes distantes 200 metros adopta la forma de una catenaria (coseno hiperbólico) de ecuación $y = 150 \cosh \dfrac{x}{150}$. Calcule la longitud del cable entre esos dos postes.

9. Deduzca una fórmula para hallar la longitud de una curva polar $r = f(\theta)$ en un intervalo $\theta \in [\alpha, \beta]$.

10. Halle la longitud de la circunferencia de ecuación polar $r = 2a \operatorname{sen} \theta$

11. Halle el área de la superficie determinada al girar alrededor del eje OX la curva de ecuación $x(t) = t$, $y(t) = t^2/2$ entre las constantes $t = 0$ y $t = 4$.

12. Calcule al área de la superficie engendrada al girar el arco de curva $y = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 1$ alrededor del eje OY.

13. Las integrales que introducimos en este ejercicio se denominan *p-integrales*.

   a) Determine los valores de p para que la integral impropia $\displaystyle\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$, para $a > 0$, sea convergente y calcule su valor.

   b) Determine los valores de p para que la integral impropia $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}$, para $a > 0$, sea convergente y calcule su valor.

14. Considere las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{en } (-\pi, 0] \\ 1 & \text{en } (0, \pi] \end{cases}; \qquad g(x) = |x|, \quad x \in [-\pi, \pi];$$

   a) Use la definición para calcular la serie de Fourier de f y deducir a partir de ella la serie de Fourier de g.

   b) Use la definición para calcular la serie de Fourier de g y deducir a partir de ella la serie de Fourier de f.

15. Desarrolle en serie de Fourier las funciones de periodo 2π:

   a) $f(x) = \begin{cases} \pi/4 & \text{si } x \in (0, \pi] \\ -\pi/4 & \text{si } x \in (-\pi, 0] \end{cases}$;

b) $g(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{si } x \in (0, \pi] \\ \pi + x & \text{si } x \in (-\pi, 0] \end{cases}$

Aplique dichos desarrollos para calcular las sumas de las siguientes series: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

16. Desarrolle en serie de Fourier la función de periodo 4 definida en $[-2, 2)$ por $f(x) = x$.

17. Halle la integral doble de los campos indicados:

    a) $f(x, y) = y^3 \cos^2 x$ sobre $R = [-\pi/2, \pi] \times [1, 2]$.

    b) $f(x, y) = xy + x/(y + 1)$ sobre $R = [1, 4] \times [1, 2]$.

18. Esboce la región sobre la que se integra, intercambie el orden de integración y evalúe las siguientes integrales:

$$(a) \quad \int_0^1 \int_{1-y}^1 (x + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad (b) \quad \int_1^4 \int_1^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

19. Demuestre que el área de la región plana limitada por la curva cerrada y simple definida en coordenadas polares por $r = f(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$, es:

$$A = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2 \mathrm{d}\theta$$

    Utilice la fórmula para calcular el área de la circunferencia de ecuación polar $\rho = 2a \cos\theta$.

20. Consideramos la región R delimitada por las rectas $y = x+1$, $y = x-3$, $y = (-1/3)x + (7/9)$, $y = (-1/3)x + 5$. Determine un cambio de variable que convierta esta región en un rectángulo y utilícelo para calcular la integral $\displaystyle\iint_R (y - x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

21. Halle la superficie del grafo del campo $f(x, y) = xy$ en el círculo de centro $(0, 0)$ y radio 1.

22. Halle $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ si $w = x^2 + y^2$, $x = u - v$, $y = v\mathrm{e}^{2u}$, expresando la respuesta en x e y.

23. En los siguientes apartados, halle $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$, primero expresando w explícitamente como función de t y diferenciando y luego por medio de la regla de la cadena:

    a) $w = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, $\quad x = \cosh t$, $\quad y = \operatorname{senh} t$

    b) $w = x\mathrm{e}^y + y \operatorname{sen} x$, $\quad x = t$, $\quad y = t^2$

Relación de ejercicios (II)

1. Otro procedimiento similar al de las sumas de Riemannn para acercarse de manera aproximada al valor de un área dada es utilizar trapecios en lugar de rectángulos. Para cada partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ se toman las áreas de los n trapecios de base $[x_{i-1}, x_i]$ y alturas $f(x_{i-1})$ y $f(x_i)$. Utilice este método para aproximar la integral de la función $f(x) = 1 - x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

2. Calcule las siguientes integrales definidas

$$a)\ \int_0^1 x^3 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x \qquad b)\ \int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos^2 x^2 \mathrm{d}x$$
$$c)\ \int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x \qquad d)\ \int_2^5 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 1}$$
$$e)\ \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen} x} \qquad f)\ \int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$$

3. Use las propiedades de la integral definida y el teorema fundamental del cálculo para hallar las siguientes derivadas:

$$a)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_1^t x^2 \mathrm{d}x\right) \qquad b)\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\int_2^t \sqrt{x^2 + 1} \mathrm{d}x\right)$$
$$c)\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\int_{-t}^t \sqrt{3 + 4x^2} \mathrm{d}x\right) \qquad d)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_1^{3t} \frac{1}{4 + x^2} \mathrm{d}x\right)$$
$$e)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{t^2}^{t^3} \frac{1}{4 + 3x^2} \mathrm{d}x\right)$$

4. Calcule el área del recinto determinado por la curva $y = x^3 - 16x$ y el eje de abscisas.

5. Halle el área determinada por las curvas $y = x^4 - 2x^2$ e $y = 2x^2$.

6. Calcule el área comprendida entre las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ en el intervalo $[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]$.

7. Halle el área entre la curva $y = \sqrt{1 - x}$ y los ejes de coordenadas.

8. Calcule el área limitada por la curva $x = 1 - y^2$ y el eje OY.

9. Calcule el área comprendida entre las curvas de ecuaciones $y = 2 - x^2$ e $y + x = 0$.

10. Calcule el área determinada por las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$.

11. Halle el área de la región limitada por la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \\ x + 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

el eje OX y la ordenada $x = 5$.

12. Halle el área de la región limitada superiormente or $xy = 1$, $x > 0$, inferiormente por $y(x^2 + 1) = x$, y a la izquierda por $x = 1$.

13. Consideremos el área del primer cuadrante limitada por la curva $y = \sqrt{x}$, la recta $x + 4y - 12 = 0$ y el eje de abscisas. Se pide

    a) Calcular el área de la región.

    b) Calcular el volumen de revolución obtenido al hacer girar la región alrededor del eje OX.

    c) Calcular el volumen de revolución obtenido al hacer girar la región alrededor del eje OY.

14. Calcule el volumen de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OY la región comprendida entre curva $y^2 = x$ y la recta $x = 1$.

15. Consideremos la región A encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2$ y $g(x) = \frac{1}{2}x$. Se pide:

    a) Halle el volumen de revolución obtenido al hacer girar la región A alrededor del eje OX.

    b) Halle el volumen de revolución obtenido al hacer girar la región A alrededor del eje OY.

16. Consideremos la región A encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2$ y $g(x) = \frac{1}{2}x$. Se pide. Plantee las integrales definidas que permiten calcular los volúmenes de revolución que se indican:

    a) Volumen de revolución obtenido al hacer girar la región A alrededor del eje $x = -1$

    b) Volumen de revolución obtenido al hacer girar la región A alrededor del eje $x = 3$

    c) Volumen de revolución obtenido al hacer girar la región A alrededor del eje $y = 2$

    d) Volumen de revolución obtenido al hacer girar la región A alrededor del eje $y = -1$

17. Calcule el volumen del sólido de revolución que se engendra al girar alrededor del eje OX la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 2 & \text{si } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

definida entre 1 y 5.

18. Calcule el volumen de un cono de altura h y radio r:

a) Utilizando el método de discos.

b) Utilizando el método de capas.

19. Calcule el volumen de un tronco de cono de altura h y radios de las bases r y R:

20. Calcule el volumen de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OX la región comprendida entre curva $y^2 = x$ y la recta $x = 1$.

21. Calcule el volumen de revolución que se genera al hacer girar el círculo de ecuación $x^2 + y^2 + r^2$ alrededor de la recta $x = x_0$ en los siguientes casos:

a) $x_0 = 0$

b) $x_0 = k \geq 1$

22. Halle la distancia recorrida por un móvil entre $t = 0$ y $t = 2$, sabiendo que su posición en cada instante está dada por:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t + t \operatorname{sen} t \\ y(t) = \operatorname{sen} t - t \cos t \end{cases}$$

23. Las coordenadas de un punto móvil vienen dadas en el instante t por las ecuaciones $x = t^2$, $y = t^3$. Encuentre la longitud del espacio recorrido entre $t = 0$ y $t = 2$.

24. Halle la longitud del arco de curva $y = x^{3/2}$ entre los puntos $(0, 0)$ y $(4, 8)$.

25. Halle la longitud del arco de curva $9x^2 = 4y^3$ limitada por $(0, 0)$ y $(2\sqrt{3}, 3)$.

26. Calcule la longitud del arco de curva $y = 2x\sqrt{x} - 1$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

27. Halle la longitud de un sector de circunferencia de radio r y amplitud θ.

28. Calcule la longitud de la *hipocicloide* cuyas ecuaciones polares son $x = 2\cos^3\theta$, $y = 2\operatorname{sen}^3\theta$.

29. La circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ gira alrededor de la recta $y = -2$. Halle el área de la superficie engendrada.

30. Calcule al área de la superficie engendrada al girar alrededor del eje OX el arco de curva $y = x^3$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

31. Encuentre el área lateral de un cilindro de radio r y altura h.

32. Calcule el área de la superficie de una esfera de radio r.

33. Halle la superficie determinada al girar alrededor del eje OX la curva de ecuación $x(t) = t$, $y(t) = t^2/2$ entre las constantes $t = 0$ y $t = 4$.

34. Calcule al área de la superficie engendrada al girar el arco de curva $y = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 1$ alrededor del eje OX.

35. Calcule el área lateral de un cono de altura h y radio de la base r.

36. Calcule la superficie de la esfera de radio R.

37. Calcule la integral del campo escalar $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre la curva $x(t) = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ e interpretar geométricamente el resultado.

38. Estudie la convergencia de las siguientes integrales impropias y, en su caso, calcular su valor:

$$(a) \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \qquad\qquad (b) \quad \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

39. Estudie la convergencia de las siguientes integrales impropias y, en su caso, calcular su valor:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)} \qquad \int_{-2}^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+2)(3-x)}} \qquad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x} \cos ax \, \mathrm{d}x$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2} \qquad \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad \int_0^\pi \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x$$

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \, \mathrm{d}x \qquad \int_{\mathrm{e}}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x(\log x)^2} \qquad \int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$$

$$\int_1^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2} \, \mathrm{d}x$$

40. Sea Ω la región bajo la curva $y = \mathrm{e}^{-x}$, $x \geq 0$. Se pide:

    a) Calcule el área de Ω.

    b) Calcule el volumen del sólido de revolución obtenido al girar Ω alrededor del eje OX.

c) Calcule el volumen del sólido de revolución obtenido al girar Ω alrededor del eje OY.

d) Calcule las superficies de revolución de los sólidos obtenidos en los apartados anteriores.

41. Desarrolle en serie de Fourier la función de periodo 2π dada por $f(x) = x$ en $(-\pi, \pi)$. Deducir de dicho desarrollo la función suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{n}$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

42. *a*) Si f es una función de periodo 2π y continua, entonces se verifica la *identidad de Parseval*:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right],$$

en donde a_n y b_n son los coeficientes de la serie de Fourier de f.

b) Aplique la identidad de Parseval a la función de periodo 2π dada por $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$.

c) Desarrolle en serie de cosenos la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$; a la serie resultante aplíquele la identidad de Parseval para sumar la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2(2n+3)^2}$.

43. Para cada una de las siguientes funciones dé su representación gráfica y su desarrollo en serie de Fourier como funciones periódicas definidas a partir del intervalo indicado por periodicidad:

a) $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ x - 6 & \text{si } 4 < x \leq 8 \end{cases}$ *b*) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } 0 < x \leq \pi \\ 0 & \text{si } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$

c) $f(x) = x$, $x \in [-2, 2)$ *d*) $f(x) = 1 - x$, $x \in [0, 2\pi)$

44. Desarrolle en serie de Fourier $y = \cosh \alpha x$, $x \in [0, \pi]$ y deducir de dicho desarrollo la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

45. Halle la integral doble de los campos indicados:

a) $f(x, y) = x^2 + 2xy - y\sqrt{x}$ sobre $R = [0, 1] \times [-2, 2]$.

b) $f(x, y) = y^5 \operatorname{sen} x \mathrm{e}^{y^3 \cos x}$ sobre $R = [0, 1] \times [-1, 0]$.

46. Aplique el teorema de Fubini a la integral $\displaystyle\iint_{\mathrm{D}} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ para los siguientes conjuntos:

a) El interior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

b) Interior de la curva $x^2 + y^2 - ax - 2ay + a^2 = 0$.

c) Para $y \geq 0$, la región comprendida entre $x^2+y^2 = 16$ y $x^2+y^2 = 9$.

47. Plantee la integral definida que permite calcular el área encerrada por la circunferencia centrada en el origen y de radio r, exterior a la cardioide de ecuación polar $\rho = r(1 - \cos\theta)$.

48. Halle el área de la región encerrada por la curva $\rho = 4 + \cos\theta$.

49. Pasando a coordenadas polares, calcular la integral:
$$\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

50. Utilizando integrales dobles y un cambio de variable, demostrar que el área interior a la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ es πab.

51. Si $w = \log(x^2 + y^2 + 2z)$, $x = r + s$, $y = r - s$, $z = 2rs$, halle $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ usando la regla de la cadena. Verifique el resultado escribiendo la expresión explicita de w en r y s.

52. Halle $\dfrac{\partial w}{\partial v}$ para $u = 0$, $v = 0$, si $w = (x^2 + y - 2)^4 + (x - y + 2)^3$, $x = u - 2v + 1$, $y = 2u + v - 2$.

53. Si $w = f(x + y, x - y)$ tiene derivadas parciales continuas respecto a $u = x + y$, $v = x - y$, pruebe que $\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)^2$.

54. Calcule mediante la definición la integral de línea, $\oint_C x^2y^2\mathrm{d}x + \mathrm{d}y$ en donde C es la circunferencia centrada en el origen y de radio r.

55. Demuestre el corolario 6.2.14 y aplíquelo para calcular el área de la región encerrada por triángulo limitado por las rectas $X = 0$, $2X - 3Y = 0$ y $X + 3Y = 9$.

56. Utilice el teorema de Green para calcular la integral de línea $\int_C 2xy\mathrm{d}x + (x^2 + 2x)\mathrm{d}y$, en donde C es la curva formada por la circunferencia $X^2 + Y^2 = 1$ recorrida en el sentido de las agujas del reloj y la elipse $(X/3)^2 + (Y/2)^2 = 1$ recorrida en el sentido contrario a las agujas del reloj. Para ello, conecte las dos partes de la curva mediante un segmento.

57. Calcule el área de la región interior al lazo del folium de Descartes, es decir, la región limitada por la curva:
$$x(t) = \frac{3t}{t^3 + 1}, \qquad y(t) = \frac{3t^2}{t^3 + 1}$$